Nombres complexes

Dans ce cours, l'important est surtout de savoir passer de la forme cartésienne ($z = a + ib$) à la forme exponentielle ($z = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$) pour résoudre des équations. Il est essentiel de se rappeler que dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, une équation de degré n possède toujours n solutions (complexes ou réelles).

2.1 Quelques notions à savoir

- *Complexe conjugué* : $\bar{z} = a - ib$
- *Module* : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\mathbf{> 0}$
- *Argument* : $\phi \in [0; 2\pi[$
- $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i^2 \cdot i = -i \Rightarrow i^{53} = (i^2)^{26} \cdot i = i$
- Formule de Moivre : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi) = (\cos\phi + i\sin\phi)^n$
- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\phi_1 + \phi 2)}$

2.2 Trouver le module et l'argument d'un nombre complexe

Exemple 1

$$z = 2 + 2i \qquad |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Exemple 3

$$z = 2^i = \left(e^{\ln(2)}\right)^i = e^{i\,ln(2)} \Rightarrow |z| = 1 \;,\; \phi = \ln(2)$$

2.3 Equations dans $\mathbb{C}$

Il y a principalement 2 manières de résoudre les équations dans $\mathbb{C}$.

1. **Passer sous forme d'Euler (exponentielle) puis résoudre avec les méthodes connues**

Exemple : $z^4 = -2i$

On cherche la forme polaire de l'expression de droite que l'on appel $u = -2i$:

$$|u| = \sqrt{2^2} = 2 \quad , \quad u = 2(0 - i) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\phi = 0 \\ \sin\phi = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$z^4 = 2e^{-i\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad k = 0, \dots, 3$$

On cherche z en appliquant la racine 4^e sur la forme polaire :

$$z = \sqrt[4]{2}e^{\left(-i\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)} \quad k = 0,1,2,3$$

On réécrit chaque solution sous forme cartésienne (pas indispensable et souvent pas demandé) :

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\left(-i\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \qquad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\left(-i\frac{9\pi}{8}\right)} = \cdots$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\left(-i\frac{5\pi}{8}\right)} = \cdots \qquad z_4 = \sqrt[4]{2}e^{\left(-i\frac{13\pi}{8}\right)} = \cdots$$

2. Remplacer $\boldsymbol{z = a + ib}$ dans l'équation puis résoudre 2 équations avec $\boldsymbol{a, b}$ inconnues

Exemple : $z^2 = -3 + 4i$

On pose $z = a + ib$:

$$(a + ib)^2 = -3 + 4i$$

On sépare la partie réelle de la partie imaginaire pour obtenir 2 équations à 2 inconnues :

$$a^2 + 2aib - b^2 = -3 + 4i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4}{b^2} - b^2 = -3 \\ a = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

On résout l'équation du 4[e] degré en se ramenant à une équation du 2[e] degré :

$$b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = b^2\,, \quad t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

b étant un nombre réel (seul z est complexe), la seule solution possible est $b^2 = 4$, donc

$$b = \pm 4 \quad , \quad a = \frac{2}{\pm 4} = \pm\frac{1}{2}$$