Calcul de limites

Le calcul de limite introduit le théorème des 2 gendarmes. Beaucoup d'élèves comprennent le principe de cette méthode mais ne savent pas trouver 2 bornes de la fonction dont on cherche la limite. Cette section a pour but de vous présenter différentes méthodes qui vous simplifieront grandement la tâche, vous rendront certainement plus rapide et vous permettront d'éviter dans le 99% des cas l'utilisation de la méthode des 2 gendarmes.

Dans le calcul de limites, lorsqu'une forme indéterminée survient, la solution n'est pas satisfaisante et elle en cache une autre. Pour découvrir cette solution cachée, il faudra lever l'indétermination.

Formes indéterminées

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

Remarque

$0 \cdot (valeur\ bornée\ qui\ varie) = 0 \neq indéterminé$! *Ex :* $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot "[-1;1]" = 0$

• Bernoulli-L'Hospital (BH)

Dans le cas des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, il convient d'utiliser la règle de Bernoulli qui consiste à dériver séparément le numérateur et le dénominateur pour lever l'indétermination.

Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (Série 5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \overset{BH}{\cong} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\left(-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{n}} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2}$$

• Evaluation des ordres de grandeur

Le cours d'ICC, peut vous aider à évaluer certaines limites en estimant l'ordre de grandeur asymptotique des deux termes de la fraction. C'est-à-dire, en prenant par exemple $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$, comparer l'ordre de grandeur de $n!$ et de n^n, càd : lequel des deux termes tend le plus vite vers ∞ lorsque $n \to \infty$. *Le calcul plus formel de ces limites peut se faire à l'aide du théorème des deux gendarmes, encore assez intuitif dans ce cas.*

Le tableau suivant peut vous être utile dans une multitude de cours à l'EPFL, il répertorie les principales fonctions rencontrées fréquemment, par ordre de grandeur croissant :

$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n\log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^3)$	$\Theta(n^d)$	$\Theta(c^n)$	$\Theta(n!)$	$\Theta(n^n)$

Cela signifie : Quand $n\to\infty$, $1 < \log n < n < n\log n < n^2 < n^3 < n^d < c^n < n! < n^n$

La notion de « Big Theta » $\Theta(\ldots)$, ne nous intéresse pas dans ce cours. Ce qui nous intéresse, c'est l'ordre de grandeur de ces fonctions qui sont classées de celles qui explosent le moins vite vers ∞, vers celle qui explosent le plus rapidement vers ∞, quand $n \to \infty$.

Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

Dans le tableau ci-dessus, $n! < n^n$, ce qui veut dire que n^n tend plus rapidement vers l'infini que $n!$ lorsque $n \to \infty$.

Le dénominateur tend plus vite vers l'infini que le numérateur : la fonction tend vers 0.

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$

• Racines et identités

Utiliser les identités remarquables pour lever les indéterminations du type $\infty - \infty$ en multipliant numérateur et dénominateur par le binôme ou trinôme conjugué.

Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ (Série 5)

• Infiniment petits équivalents (IPE) Important

Au voisinage de 0, **avec y une expression quelconque qui tend vers 0, on a**

$\lim\limits_{y\to 0} sin(y) \sim y$	$\lim\limits_{y\to 0} tan(y) \sim y$	$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

On ne remplace une fonction par son IPE que dans une expression factorisée et jamais dans une somme. Si besoin, utiliser les formules trigonométriques pour se ramener à un produit

Exemples : (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\frac{2n+3}{n^3}\right)$

Solution du (1) :

Pour utiliser les IPE, on doit vérifier que l'expression à l'intérieur du sinus tende vers 0 :
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

La fonction $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$: l'expression à l'intérieur du sinus tend donc vers 0 et on peut utiliser que $\sin(x) \sim x$, et donc, remplacer $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$:

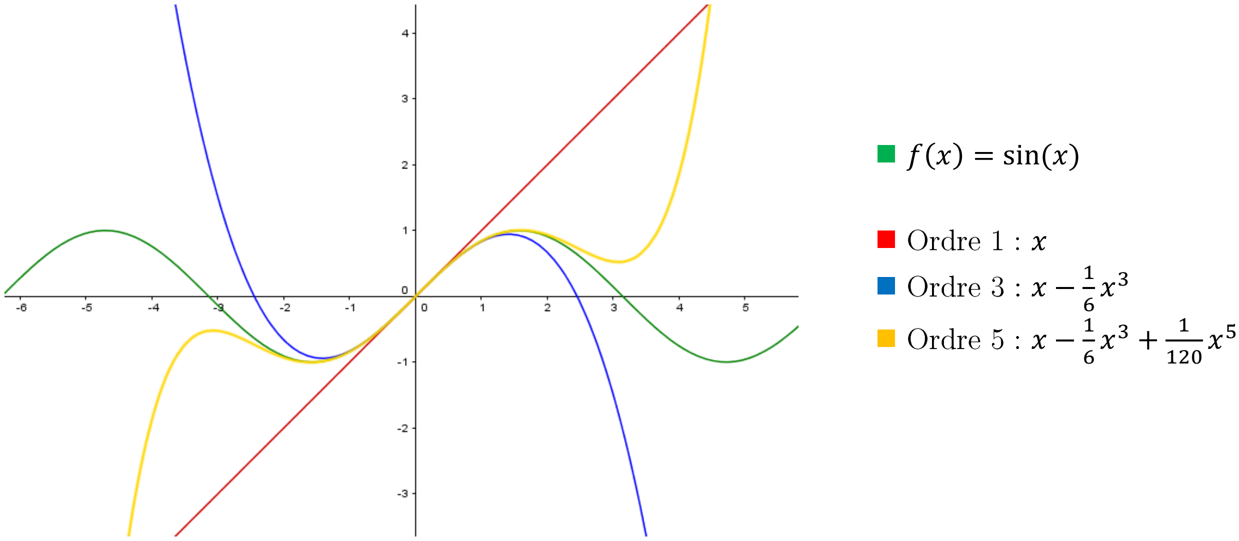
$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1}$

Comprendre d'où viennent les IPE présentés ci-dessus (facultatif mais intéressant !)

Toutes les fonctions peuvent être approximées par des polynômes. Trouver le développement limité d'une fonction (DL), revient à trouver un polynôme qui approxime cette fonction au voisinage d'un point donné. Pour un DL, on peut approximer plus ou moins finement la fonction selon l'ordre choisi.

L'exemple ci-dessous illustre la notion d'ordre sur la fonction sinus au point 0 et montre clairement que plus l'ordre est grand, mieux le polynôme représente la fonction d'origine en ce point.

Développement limité (DL) de la fonction sin(x) au point 0



Lien avec les IPE (Infiniment petits équivalents) :
On remarque sur ce graphique, que si on zoom sur 0, le polynôme d'ordre 1 : x, approxime parfaitement le sinus en ce point. On peut donc considérer que $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0, donc, quand $x \to 0$.

A noter que ce n'est qu'une approximation (quasi-parfaite) en un point particulier de la fonction ! Pour la représentation des fonctions périodiques dans leur globalité, on utilisera les séries de Fourrier, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici (Analyse III).