Convergence de Séries

Techniques pour déterminer la convergence ou divergence d'une série

1. Critère de convergence

Si $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0}$ ou $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \ n'existe\ pas}$

$\Rightarrow S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

ⓘ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ne signifie pas que S_n converge (mais si S_n converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

2. Série géométrique ?

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1}}$ (équivalent à $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a\, q^{n}}$) est

- Convergente si $0 \leq |q| < 1$

  et la somme est $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}}$

- Divergente si $|q| \geq 1$

3. Série Harmonique ?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ Converge si $p > 1$

Diverge si $p \leq 1$

4. Critère de comparaison

- $\sum b_n$ converge **et** $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \Rightarrow$ $\sum a_n$ converge (absolument)

- $\sum b_n$ diverge**et** $a_n \geq b_n \quad \forall n \Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

Exemple : Est-ce que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge ?

On pose $a_n = \frac{1}{2^n+1}$, et on choisit $b_n = \frac{1}{2^n}$

- $|a_n| \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique avec $q = \frac{1}{2}$)

$\overset{\text{cas 1}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ converge (absolument)

5. Série alternée (Critère de Leibniz) ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

La série converge si

- Le signe de a_n change avec la parité de n
- $\boxed{|a_{n+1}| \leq |a_n|}$ $\forall n$ ($|a_n|$ strictement décroissante)
- $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

6. Critères de Cauchy / d'Alembert

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ existe (Alembert)

Ou si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ existe (Cauchy)

alors si

- $\boxed{0 \leq q < 1}$: $\sum a_n$ converge absolument
- $\boxed{q > 1}$: $\sum a_n$ diverge
- $\boxed{q = 1}$: *Pas de conclusion*

7. Test de comparaison par la limite

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$, des séries à termes positifs. Si $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c}$ (c fini et > 0) alors les deux séries converge nt ou les deux divergent.

b_n	$\sum b_n$
$\frac{1}{n}$	Diverge
$\frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$	Converge
$\frac{1}{n\, ln(n)}$	Diverge
$\frac{1}{n\,(\ln(n))^2}$	Converge

Exemple : Est-ce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{atan(n)}{5+n^3}$ converge ?

Posons $a_n = \frac{atan(n)}{5+n^3}$ et $b_n = \frac{1}{n^3}$

Alors $\frac{a_n}{b_n} = n^3 \left(\frac{atan(n)}{5+n^3}\right)$, *et* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \text{atan}(n) = \frac{\pi}{2}$

Et comme $b_n = \frac{1}{n^3}$ converge , a_n converge aussi