Etude de fonction

Extrema

Si le point est un extremum (min ou max) en x_0 et si $f'(x)$ existe, alors $f'(x) = 0$.

- Minimum local : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$
- Maximum local : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$

Point d'inflexion (changement de concavité)

- $f''(x_0) = 0 \qquad et \qquad f''(x)$ change de signe en x_o : $f'''(x_0) \neq 0$

  Pour connaître la concavité de la courbe à gauche et à droite, il suffit de regarder le signe de $f''(x)$ des deux côtés de x_0.

Extremum global

Les points $x_0 \in [a, b] \subset \mathbb{D}(f)$ en lesquels f admet les extremums globaux sont éléments de :

- $A = \{a, b\}$ (le bord de $\mathbb{D}$)
- $B = \{\, les\ points\ ou\ f'(x)\ \ n'existe\ pas \,\}$
- $C = \{\, les\ points\ ou\ f'(x) = 0 \,\}$ (points critiques)

Minimum global $= \min\{\, A, B, C \,\}$ (Le min. parmi tous les éléments trouvés dans les ensembles ci-dessus)
Maximum global $= \max\{\, A, B, C \,\}$ (Le max. parmi tous les éléments trouvés dans les ensembles ci-dessus)

Convexe

Si $f'(x)$ croissante : $f''(x) \geq 0$

Concave

Si $f'(x)$ décroissante : $f''(x) \leq 0$

Discuter le graphe d'une fonction

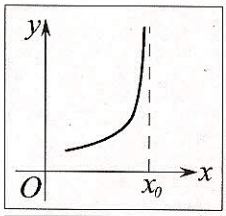
---

1) **Trouver $\mathbb{D}(f)$**
2) **Symétries :** *Parité, périodicité*
3) **Zéros de f**
4) **Continuité :** *Limite à droite / gauche pour les <u>points discontinus</u> de f et pour les <u>bords</u>*
5) **Dérivabilité :** *Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et leur $\mathbb{D}_{def}$*
6) **Points particuliers :** *Points critiques, extremums, points d'inflexion, points ou f n'existe pas*
7) **Monotonie :** *Signe de $f'(x)$, convexité, concavité*
8) **Asymptotes**
9) **Tracer le graphe de f**

Branches infinies de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

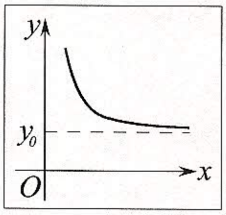
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

  Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$,

  Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.



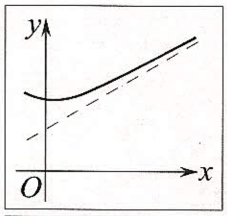
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, trois cas peuvent se présenter :

  - si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$,

    Γ admet une direction asymptotique de pente $m = a$,
    trois cas peuvent se présenter :

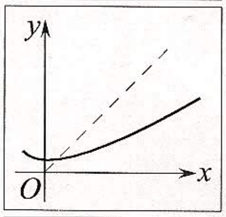
    - ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,] = b$,

      Γ admet une asymptote oblique d'équation
      $y = a\,x + b$.



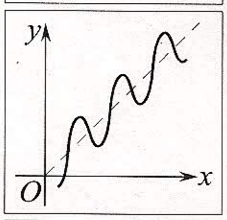
    - ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,] = \infty$,

      Γ admet une branche parabolique de direction
      de pente $m = a$.



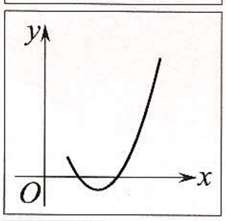
    - ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,]$ n'existe pas,

      Γ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique.



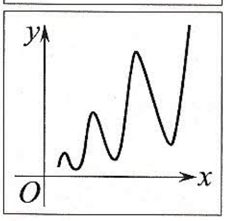
  - si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$,

    Γ admet une branche parabolique de direction
    verticale.



  - si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas,

    Γ n'admet aucune direction asymptotique.

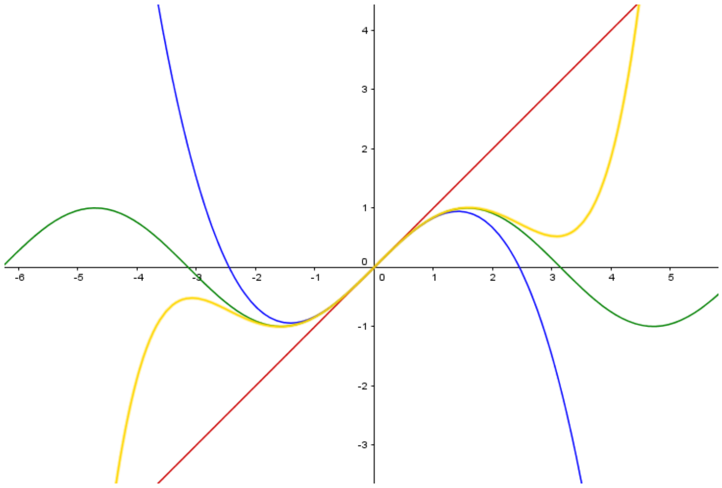


1. Développement de Taylor

Toutes les fonctions peuvent être approximées par des polynômes. Trouver le développement limité (DL), revient à trouver un polynôme qui approxime la fonction au voisinage d'un point donné. Un développement en série de Taylor est exactement la même chose sauf que ce n'est pas une approximation mais une série infini (le terme série de McLaurin désigne une série de Taylor **au voisinage de 0**).

Pour un DL, on peut approximer plus ou moins finement la fonction selon l'ordre. L'exemple ci-dessous illustre la notion d'ordre sur la fonction sinus au point 0 et montre clairement que plus l'ordre est grand, mieux le polynôme représente la fonction d'origine.

Développement limité (DL) de la fonction sin(x) au point 0



- $f(x) = \sin(x)$
- Ordre 1 : x
- Ordre 3 : $x - \frac{1}{6}x^3$
- Ordre 5 : $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

NB : Dans le chapitre du calcul de limites, nous avons présenté les IPE (Infiniment petits équivalents) ou $\sin(x) \sim x$ au voisinage de 0. Voici d'où vient ce résultat et on le voit bien sur le graphique ci-dessus.

A l'ordre infini (série de Taylor), le « DL » de la fonction devrait donc représenter parfaitement la fonction. On a présenté ici le DL sans vraiment donner d'explication sur comment le trouver. Voici le développement en série de Taylor de sin(x) pour illustrer la méthode :

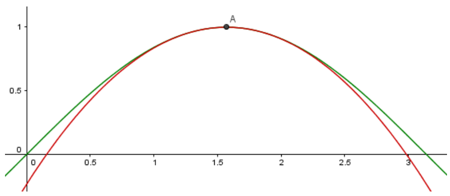
Développement en série de Taylor de sin(x) autour de 0 :

$$\sin(x) = \frac{1}{0!}\underbrace{\sin(0)}_{f(0)}x^0 + \frac{1}{1!}\underbrace{\cos(0)}_{f'(0)}x^1 + \frac{1}{2!}\underbrace{(-\sin(0))}_{f''(0)}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\underbrace{\sin^{(n)}(x)|_{x=0}}_{f^n(0)}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

On remarque les dérivées successives correspondant à chaque degré du polynôme.

On peut demander la même chose autour de n'importe quel point. Il suffit alors de faire le décalage nécessaire, par exemple, pour le développement de Taylor de sin(x) autour de $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x) = \underbrace{\frac{1}{0!}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0}_{ordre\ 0} + \underbrace{\frac{1}{1!}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1}_{ordre\ 1} + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}_{ordre\ 2} + \cdots$$



Représentation graphique du DL en $\frac{\pi}{2}$

- $f(x) = \sin(x)$
- Ordre 2 : $1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$