Continuité et dérivation

1. Continuité

Toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition. Toutes combinaisons de fonctions continues sont continues.
Graphiquement, on peut définir une fonction continue comme étant une fonction dont le graphe peut se tracer sans lever le crayon. D'où l'importance d'avoir en tête les graphes de la plupart des fonctions de base ($e^x, \sqrt{x}, Ch(x), \ldots$).

Une fonction f(x) est continue (à gauche et à droite) en un point a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. Dérivation

Graphiquement, une fonction est dérivable si elle est continue partout sur son domaine de définition.

Mais attention, dans le cas où la fonction possède un ou plusieurs points de rebroussement, elle est continue mais n'est pas dérivable en ces points. Graphiquement, si on ne sait pas si un point est dérivable dans une courbure, il faut se demander si on peut poser sa table de pique-nique à l'intérieur. Si la courbure est trop importante, par exemple en forme de V ($f(x) = |x|$), on ne peut pas pique-niquer à l'intérieur et la fonction n'est donc pas dérivable en ce point. (Par exemple, un ventre bien rond est dérivable, on peut y installer sa table de pique-nique)

Ceci se traduit plus formellement par le fait que la dérivée en chaque point de la courbe est en fait la pente de la tangente en chaque point. Si la courbe est en V, alors sur la pointe du V, la pente de la tangente est infinie et la dérivée n'existe pas.

Pour calculer la dérivée d'une fonction, on doit donc d'abord s'assurer qu'elle soit continue (condition nécessaire mais pas suffisante pour les raisons citées ci-dessus). Si elle ne l'est pas en un ou plusieurs points, on doit avant tout rendre cette fonction continue « en collant un petit morceau » à l'aide d'un prolongement par continuité en ces points, et c'est là qu'intervient la définition de la continuité expliquée au point précédent.

Dans le cas où la fonction comporte des asymptotes (et n'est donc pas continue), il n'existe pas de prolongement par continuité aux points qui partent vers l'infini et la fonction dérivée n'est donc également pas continue.

Exemple

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^*$$

Le point $x = 0$ admet une asymptote verticale et n'a donc pas d'image (la fonction n'est pas continue en $x_0 = 0$)
On ne peut pas prolonger cette fonction par continuité. Evidemment, on pourrait définir une fonction par partie de la sorte : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ mais ce n'est pas un prolongement par continuité car $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ et donc $\neq 0$. La fonction n'est pas dérivable en 0. Ce qui ne veux pas dire que la fonction n'est pas dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$ car sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^*$

Pour déterminer la dérivée en un point de la fonction (et donc la pente de la tangente en ce point), on utilise la définition suivante :

Dérivée de la fonction f(x) au point a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La fonction f est dérivable en a si cette limite (appelée le nombre dérivé) existe ($\in \mathbb{R}$)

f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0 mais la réciproque est fausse !

Dérivées des fonctions usuelles (à savoir)

Celles qui se déduisent facilement des autres sont grisées, les autres sont à savoir absolument par cœur

Dérivées de fonctions composées

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Exponentiels et logarithmes

$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

Fonctions trigonométriques

$(\sin u)' = \cos u \cdot \mathrm{u}'$	$(\mathrm{asin}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\mathrm{acos}\, u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = u'(1 + \tan^2 u)$	$(\mathrm{atan}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$(cotg\, u)' = -\frac{1}{sin^2\, u} \cdot u' = -u'(1 + cot^2\, u)$	$(acotg\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

Fonctions hyperboliques

$(\mathrm{Sh}\, u)' = \mathrm{Ch}\, u \cdot u'$	$(\mathrm{Arsh}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
$(\mathrm{Ch}\, u)' = \mathrm{Sh}\, u \cdot u'$	$(\mathrm{Arch}\, u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$(\mathrm{Th}\, u)' = \frac{u'}{\mathrm{Ch}^2\, u} = u'(1 - \mathrm{Th}^2\, u)$	$(\mathrm{Arth}\, u)' = \frac{u'}{1-u^2}$
$(\mathrm{Coth}\, u)' = -\frac{u'}{\mathrm{Sh}^2\, u} = u'(1 - \mathrm{Coth}^2\, u)$	$(\mathrm{Arcoth}\, u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

Important

Toutes les dérivées des fonctions réciproques peuvent être retrouvées par :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \forall x \quad tq. \quad f'\big(f^{-1}(x)\big) \neq 0$$