Intégration

Il faut toujours se rappeler de la définition de l'intégrale : l'aire sous la courbe, et des sommes de Riemann (tranches de Riemann), pour se rappeler qu'en intégrant, au final, on ne fait que « sommer l'aire d'une infinité de rectangles infiniment petits » qui approximent parfaitement l'aire sous la courbe.

Il n'y a pas de miracle, pour ce chapitre, le seul moyen de réussir est de pratiquer, beaucoup ! Faire les exercices plusieurs fois, transpirer, et surtout ne pas lire le corrigé avant d'avoir essayé un moment ! L'intégration est souvent simple à effectuer sur les exercices donnés car ils sont conçus exprès pour être solubles uniquement avec les méthodes vues au cours et pour qu'en utilisant la bonne méthode, tous les calculs deviennent simples.

Pour bien aborder ce chapitre il est essentiel de connaitre les dérivées sur le bout des doigts dans les 2 sens, particulièrement pour les fonctions ln(x), atan(x), asin(x), acos(x), … qui sont utilisés autant pour les changements de variables que pour l'intégration des fonctions rationnelles.

1. Primitives

Voici une liste non exhaustive des primitives à connaître par cœur.

$\int x^n \, dx$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln(x) + C$
$\int \cos(x) \, dx$	$\sin(x) + C$
$\int \sin(x) \, dx$	$-\cos(x) + C$
$\int e^x \, dx$	$e^x + C$
$\int \ln(x) \, dx$	$xln(x) - x + C$
$\int tg(x) \, dx$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$\ln(\lvert f(x)\rvert) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\text{atan}(x) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$	$\text{atan}\big(f(x)\big) + C$
$\int e^{x^2} 2x \, dx$	$e^{x^2} + C$
$\int (nx^{n-1} + 2x^{n+1}) e^{x^2} \, dx$	$x^n e^{x^2} + C$

2. Méthodes d'intégration

10.1 Intégration par changement de variable

La méthode consiste à changer de variables en posant x=$\phi(t)$ pour transformer l'intégrant de sorte qu'il soit plus facile à intégrer.

Attention ! Le changement de variable doit être réversible (bijectif).

La difficulté de cette méthode réside dans le choix de $\phi(t)$. Voyons cette méthode par un exemple concret.

Exemple 1

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx \qquad On\,pose\;\; t=\sqrt{1+x} \;\Rightarrow\; t^2=1+x \;\Rightarrow\; x=t^2-1 \quad , \quad dx=2t\,dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt=2\int (t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3-2\sqrt{1+x}+C$$

Quelques changements de variables usuels

i) Déduit de la relation : $cos^2(t)+sin^2(t)=1$

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$ on peut poser :

- $\boldsymbol{x=sin(t)}$, $x\in[-1;1]$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
  $t=asin(x)$, $dx=cos(t)dt$, $\sqrt{1-x^2}=cos(t)$

- $\boldsymbol{x=\cos(t)}$, $x\in[-1;1]$, $t\in[0;\pi]$
  $t=\mathrm{acos}(x)$, $dx=-\sin(t)\,dt$, $\sqrt{1-x^2}=\sin(t)$

ii) Déduit de la relation : $Ch^2(t)-Sh^2(t)=1$

- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$ on peut poser :
  $\boldsymbol{x=Sh(t)}$, $x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$
  $dx=Ch(t)dt$, $\sqrt{1+x^2}=Ch(t)$

- Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$ on peut poser :
  $\boldsymbol{x=Ch(t)}$, $t\geq 0$

10.2 Intégration par partie

Apprenons par un exemple concret : Une fonction du type

$$\int xln(x)\,dx$$

est facilement intégrable par partie. C'est-à-dire que l'on peut séparer les deux termes de l'expression, en dériver un, puis intégrer l'autre. Dans le cas précis, on remarque facilement que x sera dérivé et $\ln(x)$ intégré.

On pose donc :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \ln(x) & v(x) = xln(x) - x \end{array}$$

Et on applique la formule de l'intégration par partie que je ne présente plus ici car il suffit de procéder comme ci-dessus et de faire diagonale – $\int$ verticale droite : $u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$.

On a donc

$$\int xln(x)\,dx = \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{(xln(x) - x)}_{v(x)} - \int \underbrace{1}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(xln(x) - x)}_{v(x)}\,dx$$

On remarque que l'intégrale de la donnée se retrouve dans notre calcul. Pour l'éliminer, rien de plus simple, on procède comme ceci :

$$\int xln(x)\,dx = x^2\ln(x) - x^2 - \int xln(x)\,dx + \int x\,dx$$

$$2\int xln(x)\,dx = x^2\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\int xln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C$$

10.3 Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle.

Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on effectue la division euclidienne : $P(x) = Q_1(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Donc $f(x) = Q_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$

i) Décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

On décompose cette fonction en une somme de fonctions rationnelles plus simples à intégrer. Cette décomposition se base sur la décomposition de Q(x) en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ (L'ensemble des polynômes dans $\mathbb{R}$).

Exemples

1) $\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$

2) $\frac{2x+5}{(x^2-1)^2} = \frac{2x+5}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$

3) $\frac{3x^3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$

Comment déterminer les coefficients de la décomposition ?

1e méthode : par identification

Exemple : $f(x) = \frac{x-2}{x^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{ax(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+ax+b}{x^2(x^2+1)}$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a=1 \\ b=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-1 \\ d=2 \end{cases} \qquad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2-x}{x^2+1}$$

2e méthode : par évaluation

Exemple : $f(x) = \frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2}$

- Multiplication par $(x+2)$, puis évaluation $x=-2$: $\frac{9}{9} = c$
- Multiplication par $(x-1)^2$, puis évaluation $x=1$: $\frac{6}{3} = b$
- Multiplication par x, puis $x \to \infty$: $2 = a + c$

D'où $a=1,\ b=2,\ c=1$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$

ii) Intégration des éléments simples

On se retreint dans ce chapitre aux fonctions rationnelles dans lesquelles les irréductibles de degré 2 n'apparaissent qu'avec la multiplicité 1.

- $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln|x-\alpha| + C$
- $\int \frac{1}{(x-\alpha)^n} dx = \frac{1}{1-n}(x-\alpha)^{1-n} + C \quad (n>1)$
- $\int \frac{1}{1+f(x)^2} = \operatorname{atan}(f(x)) + C$

10.4 Astuces d'intégration

Intégrer $\cos^2 x, \sin^2 x$ par linéarisation : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

10.5 Intégrales définies vs indéfinies

Lors des séances d'exercices j'en ai vu quelques-uns mettre des crochets d'évaluation à chaque étape de calcul, même en calculant uniquement une primitive (intégrale indéfinie).

Cela n'est pas nécessaire.

L'intégrale indéfinie n'a pas de borne : $\int f(x)\, dx$

Elle n'a donc pas besoin d'être évaluée en quelque point que ce soit, il vous suffit de chercher une primitive de cette fonction. $\int f(x)\, dx = F(x) + C$