Algèbre Live

Tanguy Classen

February 2023

Contents

0.1 Préphase

0.1.1 Notations

Voici quelques notations pour mieux comprendre ce qui suit :

$$\begin{array}{rcl}
x & \Rightarrow & \text{Une lettre minuscule est un scalaire} \\
\vec{x} & \Rightarrow & \text{Une lettre minuscule avec une flèche au dessus est un vecteur} \\
X & \Rightarrow & \text{Une lettre Majuscule est une Matrice} \\
\mathrm{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre non-italique Majuscule est une faute de frappe} \\
\mathbb{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre majuscule grand-cerif est un ensemble} \\
\mathcal{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre caligraphique est une Base} \\
\cdots & \Rightarrow & \text{l'élément se répete horizontalement} \\
\vdots & \Rightarrow & \text{l'élément se répète verticalement} \\
\ddots & \Rightarrow & \text{l'élement se répète sur la diagonale}
\end{array}$$

Equations à une inconnue

Une equation du premier degré à une seule inconnue $x \in \mathbb{R}$ connait une seule solution (autre que l'infinit) pour satisfaire l'égalité.

Exemple

1. $2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

   $\Rightarrow \quad \mathbb{S} = [-\frac{3}{2}]$

Equations à deux inconnues

Ensuite, une equation du premier degré à deux inconnues $x \in \mathbb{R}$ connait une seule solution (autre que l'infinit), si elle possède une "précision" pour chaque inconnue.

Exemple

0.2 Scalaires, Vecteurs, Matrices dans $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

0.2.1 Scalaires

Un scalaire est un nombre.
C'est tout.

0.2.2 Vecteurs

Un vecteur est un élément possédant les variables uniques (differentes ou non les unes des elles) d'un espace de n dimensions.
En gros, un vecteur est une matrice $m\times 1$ (à une colone et m lignes)

0.2.3 Matrices $(m \times n)$

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ La matrice A dans $\mathbb{R}$ de taille $m\times n$ composée de **m lignes** et **n colones** $(m, n \in \mathbb{N})$, constitués de coefficients a_{ij} réels à indices naturels.

A sous forme matricielle, ou la matrice de A se note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} \begin{cases} m \text{ lignes} \\ n \text{ colonnes} \\ a_{i_j} \text{ les coefficients de } A \text{ t.q } m,n \geq i,j \geq 1 \mid i,j,m,n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

0.2.4 Matrices remarquables

Matrice identitée

La matrice identitée est l'élément d'unitée 1 dans l'espace de matrices, elle est la seule combinaison de coefficients (proportionnellement à un scalaire) ou la multiplication est commutative !.
On la note I_n, soit :

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c.a.d:} \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice élémentaires

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque, et A' sa forme échelonnée reduite.
On note E_L les matrices d'opérations élémentaires sur les lignes et E_C les matrices d'opérations élémentaires sur les colones.
Afin d'arriver à A', A va subir une série d'operation élémentaires soit sur les lignes, soit sur les colones, on note ces opérations par des matrice indices indiquant le type d'opération.

Opérations sur les lignes

Attention, les opération sur les lignes forment un matrice E placé à **droite** de la matrice A en question

$$\begin{cases} \text{Permutation entre } L_p \text{ et } L_k & \Longrightarrow & E_{(L_p \leftrightarrow L_k)} \\ \text{multiplication par un scalaire} & \Longrightarrow & E_{(2\cdot L_k)} \\ L_p \text{ reçoit } 2\cdot L_k & \Longrightarrow & E_{(2\cdot L_k \to Lp)} \end{cases} \quad \Longrightarrow A' = A \cdot \sum E_L$$

Opérations sur les colonnes

Attention , les opération sur les Colones forment un matrice E placé à **Gauche** de la matrice A en question

$$\begin{cases} \text{Permutation entre } C_p \text{ et } C_k & \Longrightarrow & E_{(C_p \leftrightarrow C_k)} \\ \text{multiplication par un scalaire} & \Longrightarrow & E_{(2\cdot C_k)} \\ C_p \text{ reçoit } 2\cdot C_k & \Longrightarrow & E_{(2\cdot C_k \to Cp)} \end{cases} \quad \Longrightarrow A' = (\sum E_C) \cdot A$$

Chapter 1

Opérations Matricielles

Pas toutes les opérations sur les matrices sont commutatives !

1.1 Aditions

Les additions sont commutatives et prennent action sur les coefficients des matrices (fastoche). Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ au coefficients $a_{i,j}|m,n \geq i,j \geq 1$ et $B \in M_{m\times n}$ au coefficients $a_{i,j}|m,n \geq i,j \geq 1$

$$A \,+\, B \,=\, B \,+\, A \,=\, \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1_1} & \cdots & b_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_1} & \cdots & b_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1_1}+b_{1_1} & \cdots & a_{1_n}+b_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1}+b_{m_1} & \cdots & a_{m_n}+b_{m_n} \end{pmatrix}$$

1.2 Multiplications

1.2.1 Multiplications d'une matrice par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire est commutatif ou revient à multiplier par l'identité: Soit: $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\alpha \,\cdot\, \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{1_1} & \cdots & \alpha\cdot a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\cdot a_{m_1} & \cdots & \alpha\cdot a_{m_n} \end{pmatrix}$$

Chapter 2

Applications linéaires

2.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^p$ On dit que f est une application linéaire, si f peut s'écrire sous forme d'une matrice $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$

Représentation de f

Soit $\vec{x} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $Dim(\vec{x}) = p$, et $f(\vec{x})$ une application linéaire, tel que :

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} f: & \mathbb{R}^n & \Rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) := A \cdot \vec{x} \end{cases}$$

En coordonnées :

$$[f(\vec{x})]_{\mathbb{R}(p)} := \begin{cases} f: & \mathbb{R}^n & \Rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & \vec{x} & \mapsto & [f(\vec{x})]_{\mathbb{R}^p} := A \cdot [\vec{x}]_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

2.1.1 Image et rang

soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire

1. <u>Le rang de f</u> est le rang de la matrice $f : A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ et se note :

$$rg \ = \ rg(f) \ = rg(A)$$

2. <u>l'ensemble image de f</u> est le sous ensemble de l'ensemble d'arrivée engendrée par f, et se note :

$$Im(f) = \{ \ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{Départ}} \ \} \subset \underbrace{\mathbb{R}^p}_{\text{Arrivée}}$$

Im(f) est un <u>Sous Espace Vectoriel</u>.

soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire.
Prenons $n = p$

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \ = \ \vec{v} \qquad \text{Avec : } A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

on a l'ensemble image de f tel que :

$$Im(f) = Span\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$$

Plusieurs cas sont possibles :

1. $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \cdots = \vec{v}_n = \vec{0} \implies rg(f) = rg(A) = 0$
2. $f(\vec{x})_1, \cdots, f(\vec{x})_n$proportionnels $\implies n > rg(A) > 0$

2.2 Noyau ou Ker

Le $Ker(f)$ ou Noyau de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p{}_{\ (f \text{ linéaire})}$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ que f annule. C'est à dire l'ensemble des solutions $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Le Ker de l'application linéaire f est définit par :

$$Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\} \underbrace{\subset \mathbb{R}^n}_{\text{SEV de l'ensemble de départ}} \tag{2.1}$$

2.2.1 Théorème du Rang

$Ker(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$

$$Dim(Ker(f)) + Dim(Im(f)) = n \tag{2.2}$$

2.2.2 Décomp.mini part 2

Soit A la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

On note la décomposition de A:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{base Im(A)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}_{\text{eq. du Ker(A)}} \quad \text{Avec: } \begin{cases} Im(A) & := Span(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) \\ Ker(A) & := (a + b + c = 0) \end{cases}$$

2.3 Ensemble des antécédants ou $f^{-1}(\{\vec{w}\})$

l'antécedant d'une application linéaire se note : $f^{-1}(\{\vec{w}\})$

Def :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{soit } f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ linéaire} \\ &f^{-1}(\{\vec{b}\}) = v_0 + Span(v_1, v_2) \\ &\implies f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \vec{x} \\ &\implies A \cdot f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \vec{b} \end{aligned}} \tag{2.3}$$

2.3.1 Methode pour déterminer les antécédants d'une application linéaire

prenons l'exemple suivant:
$w = (a, b, c)$ et $f^{-1}(\{\vec{w}\})$ avec f linéaire, tq $f(\vec{x}) = A/cdot\vec{x}$.
On veut déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\vec{w}\})$ de $\vec{w}$ par f

1. On place $w = (a, b, c)$ comme solution de A, car c'est la définition des antéceédants... (comme $f(x) = y \implies x(fois\ qqchose) = y$)

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & = a \\ x_2 & y_2 & z_2 & = b \\ x_3 & y_3 & z_3 & = c \end{pmatrix}$$

2. On résoud donc l'equation pour (a, b, c) selon (x, y, z).
3. On pose donc le v_0 (constante ajoutée au $ker(f)$) ainsi que les vecteurs v_1 et v_2 qui constituent le $Span$ de l'ensemble des antécédants.
4. On pose donc :

$$f^{-1}(\{\vec{w}\}) = v_0 + Span(v_1, v_2)$$

2.4 Transformations linéaires

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

2.4.1 Symétries

est une symétrie si :

$$\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x} \\ A \text{ est une projection par l'axe } g \text{ si :} \\ A^2 = I_n \\ g = \frac{1}{2}(f + I_n) \\ Ker(g) = Ker(f + I_n) \\ Im(g) = Ker(f - I_n) \end{array}} \tag{2.4}$$

2.4.2 Rotation

est une Rotation si :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x} \\ A \text{ est une rotation par l'origine} 0_x \text{ si :} & \end{array}} \tag{2.5}$$

2.4.3 Reflexion

est une Reflexion ou Symetrie orthogonale si :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} & f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x} \\ A \text{ est une reflexiom par l'axe d'angle d'inclinaison } \varphi \text{ si :} & \end{array}} \tag{2.6}$$

2.5 Rang

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et A' son echelonnée reduite.1

$$\begin{aligned} \textbf{Rang}(A) &= \textbf{Dim}(A) \\ &= \textbf{nombre de pivots} \text{ dans l'échelonnée reduite} \\ &\to \text{si } \mathrm{Det}(A) = 0 \implies \mathrm{Rang}(A) \neq n \end{aligned} \tag{2.7}$$

Exemple

$$A = M_{4\times 4}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{4_1} & \cdots & a_{4_4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Rang}(A) = 2$$

2.6 Dimension

Soit A une matrice et A' son echelonnée reduite:

$$\begin{aligned} \textbf{Dim}(A) &= \textbf{Rang}(A) \\ &= \textbf{nombre de pivots} \text{ dans l'échelonnée reduite} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Exemple

$$A = M_{4\times 4}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{4_1} & \cdots & a_{4_4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Dim}(A) = 2$$

2.7 Décomposition minimale

Soit A une matrice et A' son echelonnée reduite:

$$\text{La } \textbf{Décomp}_{\textbf{mini}}(A) \equiv \text{Somme des } (\textbf{Colones pivots} \text{ de } \textbf{A})\cdot(\textbf{Lignes pivots} \text{ de } \textbf{A'}) \tag{2.9}$$

Exemple

$$A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} & a_{1_3} & a_{1_4} \\ a_{2_1} & a_{2_2} & a_{2_3} & a_{2_4} \\ a_{3_1} & a_{3_2} & a_{3_3} & a_{3_4} \\ a_{4_1} & a_{4_2} & a_{4_3} & a_{4_4} \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right\} \text{lignes 1 et 2 ont des pivots} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\implies$ donc, <u>les colones 1 et 2 de A</u> sont les colonnes pivots: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1_1} \\ a_{2_1} \\ a_{3_1} \\ a_{4_1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{1_2} \\ a_{2_2} \\ a_{3_2} \\ a_{4_2} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1_3} \\ a_{2_3} \\ a_{3_3} \\ a_{4_3} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1_4} \\ a_{2_4} \\ a_{3_4} \\ a_{4_4} \end{matrix} \end{pmatrix}$

On a donc :

$$\mathrm{Decomp}_{\mathrm{min}}(A) := \begin{pmatrix} a_{1_1} \\ a_{2_1} \\ a_{3_1} \\ a_{4_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1_2} \\ a_{2_2} \\ a_{3_2} \\ a_{4_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.8 Déterminant

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A est une matrice carrée !

Det(A) :

- Le produit pondéré des coefficient des diagonales de la matrice
- Associe un nombre à une matrice
- Aire engendré par l'éspace de la matrice

Det(A) = 0 si :

- ⇒ les **lignes** ou les **colonnes** sont **semblables**
- ⇒ les **lignes** possèdent **toutes au moin un 0**
- ⇒ La **somme** des **coefficient** des **lignes** vaut **0**

(2.10)

2.8.1 Calcul du déterminant :

2.9 Dépendance linéaire

lin.dép si :

- ⇒ les vecteurs sont **egaux**
- ⇒ les vecteurs sont **proportionnels**
- ⇒ le **Det=0**
- ⇒ La matrice n'est **pas compatible**
- ⇒ les vecteurs sont de **même diréction**
- ⇒ les vecteurs se **chevauchent**
- ⇒ les vecteurs sont issues d'une **combinaison linéaire non triviale**
- ⇒ un vecteur peut **engendrer l'autre**

lin.indép si :

- ⇒ les vecteurs sont **absoluments différents**
- ⇒ les vecteurs ne sont **PAS proportionnels**
- ⇒ le **Det0**
- ⇒ La matrice est **compatible**(ou donne l'identitée)
- ⇒ les vecteurs sont de **colinéaires**
- ⇒ un vecteur ne peut **pas engendrer l'autre**

(2.11)

2.10 Équation de plan

$:= ax + by + ... + d$:

- ⇒ **Produit vectoriel** des vecteurs
- ⇒ Coefficients des **Det par bloc** ↔ cofacteurs
- On oublie pas de calculer d avec un point connu !

(2.12)

2.11 Équation de droite

$ax + by + ... + d = 0$

$$\begin{array}{lcl} \vec{v_a},\ \vec{v_b} \text{ sur la droite} & \Rightarrow & V = span\{\vec{v_a} - \vec{v_b}\} \\ \\ \vec{v_a},\ \text{dirige la droite} & \Rightarrow & V = span\{\vec{\alpha} - \vec{a}\} \text{ tel que : } Det(\vec{\alpha}) = \langle \vec{a} - \vec{x} \rangle = 0 \end{array} \tag{2.13}$$

2.12 Application linéaire

soit l'application $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire, on a :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^n & \Rightarrow & \mathbb{R}^p \\ f(\vec{x}) & \mapsto & A \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ & & \text{tel que : } A \in M_{p\times n}(\mathbb{R}) \end{array}} \tag{2.14}$$