Algèbre Live 2023

Tanguy Classen

September 2023

Contents

0.1 Préphase

0.1.1 Notations

Voici quelques notations pour mieux comprendre ce qui suit :

$$\begin{array}{rcl}
x & \Rightarrow & \text{Une lettre minuscule est un scalaire} \\
\vec{x} & \Rightarrow & \text{Une lettre minuscule avec une flèche au dessus est un vecteur} \\
X & \Rightarrow & \text{Une lettre Majuscule est une Matrice} \\
\mathrm{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre non-italique Majuscule est une faute de frappe} \\
\mathbb{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre majuscule grand-cerif est un ensemble} \\
\mathcal{X} & \Rightarrow & \text{Une lettre caligraphique est une Base} \\
\cdots & \Rightarrow & \text{l'élément se répete horizontalement} \\
\vdots & \Rightarrow & \text{l'élément se répète verticalement} \\
\ddots & \Rightarrow & \text{l'élement se répète sur la diagonale}
\end{array}$$

Equations à une inconnue

Une equation du premier degré à une seule inconnue $x \in \mathbb{R}$ connait une seule solution (autre que l'infinit) pour satisfaire l'égalité.

Exemple

1. $2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

   $\Rightarrow \quad \mathbb{S} = [-\frac{3}{2}]$

Equations à deux inconnues

Ensuite, une equation du premier degré à deux inconnues $x \in \mathbb{R}$ connait une seule solution (autre que l'infinit), si elle possède une "précision" pour chaque inconnue.

Exemple

0.2 Scalaires, Vecteurs, Matrices dans $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

0.2.1 Scalaires

Un scalaire est un nombre.
C'est tout.

0.2.2 Vecteurs

Un vecteur est un élément possédant les variables uniques (differentes ou non les unes des elles) d'un espace de n dimensions.
En gros, un vecteur est une matrice $m\times 1$ (à une colone et m lignes)

0.2.3 Matrices $(m \times n)$

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ La matrice A dans $\mathbb{R}$ de taille $m\times n$ composée de **m lignes** et **n colones** $(m, n \in \mathbb{N})$, constitués de coefficients a_{i_j} réels à indices naturels.

A sous forme matricielle, ou la matrice de A se note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m \text{ lignes} \\ n \text{ colonnes} \\ a_{i_j} \text{ les coefficients de } A \text{ t.q } m, n \geq i, j \geq 1 \mid i, j, m, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

0.2.4 Matrices remarquables

Matrice identitée

La matrice identitée est l'élément d'unitée 1 dans l'espace de matrices, elle est la seule combinaison de coefficients (proportionnellement à un scalaire) ou la multiplication est commutative !.
On la note I_n, soit :

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c.a.d:} \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice élémentaires

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque, et A' sa forme échelonnée reduite.
On note E_L les matrices d'opérations élémentaires sur les lignes et E_C les matrices d'opérations élémentaires sur les colones.
Afin d'arriver à A', A va subir une série d'operation élémentaires soit sur les lignes, soit sur les colones, on note ces opérations par des matrice indices indiquant le type d'opération.

Opérations sur les lignes

Attention, les opération sur les lignes forment un matrice E placé à **droite** de la matrice A en question

$$\begin{cases} \text{Permutation entre } L_p \text{ et } L_k & \Longrightarrow & E_{(L_p \leftrightarrow L_k)} \\ \text{multiplication par un scalaire} & \Longrightarrow & E_{(2\cdot L_k)} \\ L_p \text{ reçoit } 2\cdot L_k & \Longrightarrow & E_{(2\cdot L_k \to Lp)} \end{cases} \quad \Longrightarrow A' = A \cdot \sum E_L$$

Opérations sur les colonnes

Attention , les opération sur les Colones forment un matrice E placé à **Gauche** de la matrice A en question

$$\begin{cases} \text{Permutation entre } C_p \text{ et } C_k & \Longrightarrow & E_{(C_p \leftrightarrow C_k)} \\ \text{multiplication par un scalaire} & \Longrightarrow & E_{(2\cdot C_k)} \\ C_p \text{ reçoit } 2\cdot C_k & \Longrightarrow & E_{(2\cdot C_k \to Cp)} \end{cases} \quad \Longrightarrow A' = (\sum E_C) \cdot A$$

0.3 préambule

0.3.1 organisation des nombres

On notes les differents ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ les nombres **naturels** {0,1,2,3,4,...}
- $\mathbb{Z}$ les nombres **entiers** {-2,-1,0,1,2,...}
- $\mathbb{Q}$ les nombres **rationnels** $\{\frac{p}{q} \forall\, p, q \ \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}$ les nombres **Réels** $\{\sqrt{2}, \pi, ...\}$
- $\mathbb{C}$ les nombres **complexes** $\{z = a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

Chapter 1

Systèmes d'équations linéaires

1.1 Equations linéaires

1.1.1 définition

on note équation linéaire, une équation aux inconnues (variables) ($x_1, x_2, ...x_n$) quantifiés par des entiers ($n \in \mathbb{N}^*$)
On note:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \quad \begin{cases} a_i \ \in \ \mathbb{R} \text{ les coefficients} \\ i = 1, ..., n \ \in \ \mathbb{N}^* \text{ les quantificateurs} \\ b \ \in \ \mathbb{R} \text{ le terme de droite (ou terme constant)} \end{cases}$$

1.1.2 Systèmes d'équations linéaires

Un système d'équation linéaire est un ensemble d'une ou de plusieur (on notera m) équations linéaires ou les inconnues sont quantifiés par des entiers positifs non nuls (que l'on notera n).

$$\begin{cases} a_{1_1}x_1 + a_{1_2}x_2 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ a_{2_1}x_1 + a_{2_2}x_2 + ... + a_{2_n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n = \text{ le nombre d'inconnues (ou de colonnes)} \\ m = \text{ le nombre d'équations (ou de lignes)} \end{array}}$$

1.1.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires

Méthode 1: élimination

Opérations sur les équations, ou par "élimination"

Méthode 2: Graphique

Méthode graphique, qui est nulle car on a seulement 2 dimensions représentables ($(m, n \leq 2$)...

Méthode 3: substitution

Par substitution, en isolant une variable d'une équation et en l'injectans dans les autres équations.
on essaye d'exprimer la variable en fonction des autres qui seraient disponibles

Méthode 4: échelonnage de matrices

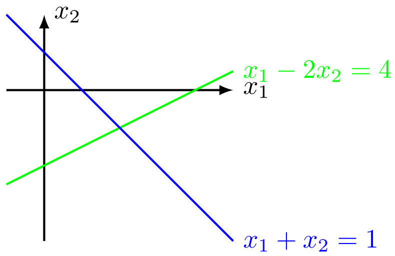
Methode matricielle implique l'utilisation d'opérations élémentaires (échelonner).

1.1.4 Solutions

Une solution d'un système est une liste de nombre réel (c'est un ensemble, et même un sous espace vectoriel de dimension inférieur ou exactement égal à celui de l'équation)

Ex:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$



1.2 opérations élémentaires

On a 3 types d'opérations sur les systèmes d'équations pour passer d'un système initial S à un système équivalent S' préservant l'ensemble de solutions.

$$\boxed{S} \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{réversible}} \boxed{S'}$$

1.2.1 Type 1 : permutation de deux équations du système

on permute les deux équations i et j entre elles :

$$\boxed{S} \begin{cases} a_{1_1}x_1 + a_{1_2}x_2 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + ... + a_{i_n}x_n = b_i \\ a_{j_1}x_1 + a_{j_2}x_2 + ... + a_{j_n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{S'} \begin{cases} a_{1_1}x_1 + a_{1_2}x_2 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{j_1}x_1 + a_{j_2}x_2 + ... + a_{j_n}x_n = b_j \\ a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + ... + a_{i_n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.2 Type 2 : multiplication d'une équation par un nombre réel non nul

on multiplie l'équation i par le réel λ

$$\boxed{S} \begin{cases} a_{1_1}x_1 + a_{1_2}x_2 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + ... + a_{i_n}x_n = b_i \\ a_{j_1}x_1 + a_{j_2}x_2 + ... + a_{j_n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{S'} \begin{cases} a_{1_1}x_1 + a_{1_2}x_2 + ... + a_{1_n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_{i_1}x_1 + \lambda \cdot a_{i_2}x_2 + ... + \lambda \cdot a_{i_n}x_n = \lambda \cdot b_i \\ a_{j_1}x_1 + a_{j_2}x_2 + ... + a_{j_n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + ... + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.6}$$

1.2.3 type 3: on ajoute à une équation un multiple d'une autre

Chapter 2

Les matrices

2.1 définitions

On appelle Matrice un tableau rectangulaire de nombres.

2.1.1 la matrice des coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{on la note :} \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ avec } A = (a_{ij}), \begin{cases} 1 \leq i \leq m & \text{(lignes)} \\ 1 \leq j \leq n & \text{(colonnes)} \end{cases}$$

2.1.2 La matrice augmentée

on ajoute les termes de droites.

$$\begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} & | & b_1 \\ \vdots & & & | & \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} & | & b_m \end{pmatrix}$$

on dira que : i = indice des lignes
j = indice des colonnes

2.2 Échelonner une matrice

L'échelonnage via la méthode de Gauss-Jordan, consiste manipuler la matrice de base via les opération élémentaires sur les lignes (types 1,2,3)

Ex:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de base}} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonée}} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonée réduite}}$$

2.2.1 Matrice échelonnée, et échelonnée reduite

Matrice échelonnée

Une matrcie est dite échelonnée si ses lignes verifient :

1. Toutes lignes de zéro est suivie uniquement par des lignes de zéros
2. l'indice de colonnes (le j) du premier terme non-nul d'une ligne est supérieur à celui du premier terme non-nul de la ligne précedente.

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{structure en escaliers} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{lignes de zéros} \end{array}$$

On appelle les $\boxed{*}$ les pivots, ils occupent des positions de pivots et sont dans les colonnes pivots.

Matrice échelonnée Réduite

Une matrice est dite échelonnée réduite (ER) si elle vérifie les points 1. et 2. et que les pivots ($\boxed{*}$) valent $\boxed{1}$ et sont les seuls coefficients non-nuls de la colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Systèmes compatibles

Un système est compatible **si est seulement si** la matrice augmentée sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite **n'a pas de ligne comme-ci:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & | & \underbrace{*}_{\text{non-nul}} \end{pmatrix}$$

Quand le système est compatible, on a deux cas possibles:

2.3.1 Premier cas

Une unique solution

$\Leftrightarrow$ on a pas de variables libres

$\Leftrightarrow$ toutes les variables sont de base

$\Leftrightarrow$ toutes les colonnes de la matrice des coefficients ont un pivot.

Ex:

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ 0 & \boxed{*} & \cdots & | & \cdots \\ 0 & 0 & \boxed{*} & | & \cdots \end{pmatrix}$$

2.3.2 Deuxième cas

Une infinité de solutions

$\Leftrightarrow$ on a au moin une variable libre

$\Leftrightarrow$ On a au moin une colonne de la matrice des coefficients qui est non pivot

Ex:

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & \cdots & * & \cdots & | & \cdots \\ 0 & \boxed{*} & * & \cdots & | & \cdots \\ 0 & 0 & \underbrace{0}_{} & \boxed{*} & | & \cdots \end{pmatrix}$$

colonne non pivot, x_3 est libre

Après avoir échelonné une matrice, il est simple de déterminer si le système possède une unique, une infinité ou aucune solutions.

2.4 Ensembles de solutions

2.4.1 Une unique solution

Si le système peut être résolu et que chaque colonne contient au moins un pivot par ligne, alors le système possède un ensemble de solution unique.

On dit alors, que le système est **compatible**

Ex:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de base}} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonée réduite}} \Rightarrow \mathcal{S} = \begin{cases} x_1 = & 3/4 \\ x_2 = & 1 \\ x_3 = & -1/4 \end{cases}$$

2.4.2 Une infinité de solutions

Si on a une ligne ne contenant que des 0, on peut avoir une infinité de solutions Les variables que l'ont peut exprimer (avec des pivots) sont les variables de base et les variables dont la ligne est remplie de zéro s'appelle la variable libre.

Ex:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de base}} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonée réduite}} \Rightarrow \mathcal{S} = \begin{cases} x_1 & = & -1s + 2 \\ x_2 & = & 2s + 3 \\ x_3 & = & \underbrace{s}_{\text{variable libre}} \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

On note ainsi la solution :

$$\mathcal{S} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

2.4.3 Aucune solutions

Si le système possède une impossibilité (par exemple $0 = -5$) on a alors aucune solutions possible.
Le système n'est pas compatible.

Ex:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de base}} \sim \cdots \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonée réduite}} \Rightarrow \mathcal{S} = \text{Aucune solutions}$$

2.5 Équations vectorielles

En effet, les systèmes d'equations peuvent être représentés dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou même $\mathbb{R}^n$

2.5.1 applications linéaires 1

Lorsqu'on cherche la soltion d'une dite "application linéaire", on cherche entre-autres les solutions d'un système d'équation.

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

on note donc combinaison linéaire, la solution d'une collection de vecteurs (A) multipliés par un scalaire différent ($\vec{x}$) qui generent un vecteur ($\vec{b}$)

$$\text{soit la solution du système : } \begin{cases} a_{1_1}\cdot x_1 + \cdots + a_{1_n}\cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m_1}\cdot x_1 + \cdots + a_{m_n}\cdot x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} & | & b_1 \\ \vdots & & & | & \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} & | & b_m \end{pmatrix}$$

En effet, si on cherche la combinaison linéaire suivante :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

On a les vecteurs de A :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1_1} \\ \vdots \\ a_{m_1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1_2} \\ \vdots \\ a_{m_2} \end{pmatrix}, ..., \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1_n} \\ \vdots \\ a_{m_n} \end{pmatrix}$$

Qui donnent la matrice A :

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}$$

La variable $\vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le membre de droite $\vec{b}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.5.2 Span

Soient $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ des veteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ s'appelle le span.
On le note :

$$span\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\} = \{\underbrace{\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_p\vec{v}_p}_{\in\mathbb{R}} \mid \lambda_1 , ..., \lambda_p \in \mathbb{R} \}$$

remarques

Le span est un sous espace vectoriel de dimension égale ou inférieur à l'espace de départ.

$$span\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Le span décrit l'ensemble (le sous espace vectoriel) des solutions de la combinaison des vecteurs.

2.6 Équations matricielles

Comme vu précédemment, on pet exprimer les combinaisons linéaires comme le produit d'une matrice et d'un vecteur.

$\Rightarrow$ idée fondamentale de l'algèbre linéaire

Pas toutes les opérations sur les matrices sont commutatives !

2.7 Aditions

est commutatif

Les additions sont commutatives et prennent action sur les coefficients des matrices (fastoche). Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ au coefficients $a_{i,j}|m,n \geq i,j \geq 1$ et $B \in M_{m\times n}$ au coefficients $a_{i,j}|m,n \geq i,j \geq 1$

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1_1} & \cdots & b_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m_1} & \cdots & b_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1_1}+b_{1_1} & \cdots & a_{1_n}+b_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1}+b_{m_1} & \cdots & a_{m_n}+b_{m_n} \end{pmatrix}$$

2.7.1 Produit matrice-vecteur

n'est PAS commutatif

on note le produit matrice vecteur :

$$A \cdot \vec{x}\ ,\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Pour que le produit matrice-vecteur existe, il faut que les dimensions des colonnes de la matrice soit égala à la dimension du vecteur dont-elle est multiplié.

Soit, une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ peut seulement être multipliée (par la droite) par un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Ex:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}}_{m\times \boxed{n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boxed{n}\times 1}$$

Ainsi, le produit matrice vecteur peut s'écrire sous plusieurs formes :

1. un système d'équations linéaires
2. une matrice augmentée $(A|\vec{b})$
3. une équation vectorielle ($x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$)

Comment effectuer une multiplication matrice-vecteur

à l'aide de votre doigt, suivez les directions indiqués par les flèches (en rouge la main gauche, et vert la main droite) sur chaque coefficients de la matrice et du vecteur.
Attention aux dimensions !

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}}_{\boxed{m}\times\boxed{n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boxed{n}\times\boxed{1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1_1}\cdot x_1 + a_{1_2}\cdot x_2 + ... + a_{1_n}\cdot x_n \\ a_{2_1}\cdot x_1 + a_{2_2}\cdot x_2 + ... + a_{2_n}\cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m_1}\cdot x_1 + a_{m_2}\cdot x_2 + ... + a_{m_n}\cdot x_n \end{pmatrix}}_{\boxed{m}\times\boxed{1}}$$

2.7.2 Propriétés

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n),\ \vec{a}_i \in \mathbb{R}^m, 1 \leq i \leq n$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \vec{b}\ \in\ \mathbb{R}^m$, $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moin une solution (est compatible)
2. $\forall\, \vec{b}\ \in\ \mathbb{R}^m$, $\vec{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A
3. $span\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}\ =\ \mathbb{R}^m$, les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$
4. Chaque ligne de A possède un pivot.

2.7.3 Multiplications d'une matrice par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire est commutatif ou revient à multiplier par l'identité:
Soit: $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{1_1} & \cdots & a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_1} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{1_1} & \cdots & \alpha \cdot a_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m_1} & \cdots & \alpha \cdot a_{m_n} \end{pmatrix}$$

2.8 Dépendance linéaire

lin.dép si :

$\Rightarrow$ les vecteurs sont **egaux**
$\Rightarrow$ les vecteurs sont **proportionnels**
$\Rightarrow$ le **Det=0**
$\Rightarrow$ La matrice n'est **pas compatible**
$\Rightarrow$ les vecteurs sont de **même diréction**
$\Rightarrow$ les vecteurs se **chevauchent**
$\Rightarrow$ les vecteurs sont issues d'une **combinaison linéaire non triviale**
$\Rightarrow$ un vecteur peut **engendrer l'autre**

(2.1)

lin.indép si :

$\Rightarrow$ les vecteurs sont **absoluments différents**
$\Rightarrow$ les vecteurs ne sont **PAS proportionnels**
$\Rightarrow$ le Det$\neq 0$
$\Rightarrow$ La matrice est **compatible**(ou donne l'identitée)
$\Rightarrow$ les vecteurs sont de **colinéaires**
$\Rightarrow$ un vecteur ne peut **pas engendrer l'autre**

Chapter 3

Transformations Linéaires

On appelle transformation linéaire, l'application qui renvoie un élément d'un ensemble de départ dans un ensemble d'arrivée de façon linéaire.

$$T(\vec{x}) = \vec{b} \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \mapsto & T(\vec{x}) \; = \; A \cdot \vec{x} \; = \; \vec{b} \end{cases} \qquad \text{avec } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

On voit donc que pour une application allant de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^m$, on a $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ la matrice associée à Tde dimenson $m \times n$ et le vecteur de l'ensemble de départ $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de dimension $n \times 1$, et ainsi, le vecteur dans l'ensemble d'arrivée $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ de dimension $m \times 1$

3.0.1 Linéarité

1. $T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u} + \vec{v})$
2. $-T(\vec{v}) = T(-\vec{v})$
3. $\lambda \cdot T(\vec{v}) = T(\lambda \cdot \vec{v})$
4. $T(\vec{0}) = \vec{0}$

3.1 surjective, injective

3.1.1 Surjective

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite surjective si tout vecteur de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ (ensemble d'arrivée) est l'image d'au moin un (un ou plusieurs) vecteur de $\mathbb{R}^n$ (ensemble de départ).

Propriétés

1. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A
2. $Im(T) = \mathbb{R}^m$
3. Chaque ligne de A possède un pivot
4. $Span\{\underbrace{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n}_{\text{colonnes de} A}\} = \mathbb{R}^m$ (les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$
5. si $A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & ... & * \\ 0 & 1 & * & * & * & ... & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & ... & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & ... & * \end{pmatrix}$ on a un pivot par ligne.

3.1.2 Injectivité

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite surjective si tout vecteur de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ (ensemble d'arrivée) est l'image d'au plus un (soit un seul soit aucun) vecteur de $\mathbb{R}^n$ (ensemble de départ).

Propriétés

1. $T(\vec{x}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale : $T(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m, T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au plus une solution
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{y} \implies T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$
4. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \implies \vec{x} = \vec{y}$
5. les colonnes de A sont linéairement indépendantes
6. A possède un pivot par colonnes
7. si $A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a un pivot par colonnes.

3.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Noyau ($Ker(T)$)

Soit T une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Le *noyau* de T ou $Ker(T)$ est l'ensemble dees vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $T(\vec{x} = \vec{0}$.
On le note :

$$Ker(T) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(vecx) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ensemble de départ}$$

Image ($Im(T)$)

Soit T une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
l'image ou ($Im(T)$) est définie par :

$$Im(T) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m | \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ T(\vec{x}) = \vec{b}\}$$