Table des matières

Page

Chapitre 1

Équations linéaires

Rappel : m est le nombre de lignes et n le nombre de colonnes.

1.1 Étude des solutions d'un système

Définition 1. On considère un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

qui peut être mis sous forme matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \tag{1.2}$$

où A est la matrice des coefficients de taille $m \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est la solution formée des n inconnues et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est le terme constant (ou terme de droite). Il peut aussi être mis sous forme d'équation vectorielle,

$$x_1\vec{a_1} + \cdots + x_n\vec{a_n} = \vec{b} \tag{1.3}$$

où les $\vec{a_i}$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A $\forall i = 1, \ldots, n$.

Proposition. Le système satisfait une des situations suivantes :

i. Il possède une unique solution,

ii. Il possède une infinité de solutions,

iii. Il ne possède aucune solution.

Définition 2. Un système admettant une solution, unique ou pas, est dit compatible. Un système n'admettant aucune solution est dit incompatible.

Définition 3. Dans le cas d'un système homogène, $\vec{b} = 0$, le système admet toujours la solution triviale $\vec{x} = 0$ et ne peut donc pas être incompatible.

1.1.1 Types de variables

Les variables de bases correspondent aux variables des colonnes pivots. Les variables libres correspondent aux variables des colonnes non-pivots.

Si la $i^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice ne possède pas de pivot dans la forme échelonnée, x_i est une variable libre.

Si la $i^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice possède un pivot dans la forme échelonnée, x_i est une variable de base.

1.1.2 Solution unique

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. le système ne possède pas de variables libres,

ii. toutes les variables sont des variables de base,

iii. toutes les colonnes de la matrice sont des colonnes pivots,

iv. la solution est unique.

1.1.3 Infinité de solutions

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. le système possède une ou plusieurs variables libres,

ii. toutes les colonnes ne sont pas des colonnes pivots,

iii. le système possède une infinité de solutions.

Si une ligne du type

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

apparait dans la forme échelonnée, le nombre de variables est plus grand que le nombre d'équations (non triviales) $\Leftrightarrow$ une ou plusieurs variables sont libres.

Exemple Dans un cas où $n = 5, m = 3$ et nous avons les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. La forme échelonnée du système est de type

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

la solution peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 & = & b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & = & b_2 \\ x_5 & = & b_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x_1 & = & b_1 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 \\ x_2 & = & b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 \\ x_5 & = & b_3 \\ x_3, & x_4 & \text{libres} \end{array}\right.$$

ce qui revient à l'ensemble des solutions

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

1.1.4 Pas de solution

Si la forme échelonnée de la matrice d'un système possède une ligne du type

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & h \end{array}\right), h \neq 0$$

alors le système est incompatible car la colonne de droite devient une colonne pivot.

1.2 Indépendance linéaire

1.2.1 Dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non nuls qui forment la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

Si $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = 0$ n'admet que $\alpha = \beta = 0$ comme solution

i. $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendants
ii. $\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\} = \mathbb{R}^2$.
iii. la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$

Si $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = 0$ admet une solution non triviale

i. $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement dépendants,
ii. $\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est une droite,
iii. $\vec{v_2} = \lambda\vec{v_1}$ et on dit que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires.

1.2.2 Généralisation à $\mathbb{R}^n$

Soient $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$ et les vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p} \in \mathbb{R}^n$ tous non nuls, qui forment la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ et la matrice $n \times p$ formée des vecteurs colonnes, $A = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_p} \end{pmatrix}$.

Si $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_p\vec{v_p} = 0$ n'admet que $\alpha_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, p$

i. $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}$ sont linéairement indépendants,
ii. si
   (a) $p = n$, $\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\} = \mathbb{R}^n$, toutes les colonnes de la matrice A sous forme échelonnée sont des colonnes pivots et la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.
   (b) $p < n$, $\text{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\} \neq \mathbb{R}^n$, toutes les colonnes de A sous forme échelonnée sont des colonnes pivots et la famille engendre une partie de $\mathbb{R}^n$ (par exemple une droite, un plan,...).
   (c) $p > n$ est impossible car la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ est libre.

Si $\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_p\vec{v_p} = 0$ admet une solution non triviale

i. $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}$ sont linéairement dépendants,
ii. la forme échelonnée de A possède des colonnes non pivots,
iii. au moins un des vecteurs de la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_p}\}$ est combinaison linéaire d'un autre.

1.3 Transformations linéaires

Théorème 1. Soit $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors $\exists! A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}, \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Elle est donnée par $A = \begin{pmatrix} T(\overrightarrow{e_1}) & \cdots & T(\overrightarrow{e_n}) \end{pmatrix}$ où $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $T(\overrightarrow{e_i}) \in \mathbb{R}^m$ $\forall i = 1, \ldots, n$.

1.3.1 Transformations injectives et surjectives

1.3.1.1 Injectivité

Définition 4. Une transformation linéaire $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est injective si tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au plus un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Remarques :
- Si T est injective alors $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v} \Rightarrow T(\overrightarrow{u}) \neq T(\overrightarrow{v})$.
- T est injective $\Leftrightarrow \forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m, T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ admet au plus une solution.

Théorème 2. Soit $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. T injective $\Leftrightarrow T(\overrightarrow{x}) = 0$ n'admet que la solution triviale $\overrightarrow{x} = 0$.

1.3.1.2 Surjectivité

Définition 5. Une transformation linéaire $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est surjective si tout vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au moins un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Remarque : T est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^m$

Théorème 3. Soit A la matrice canoniquement associée à T telle que $A\overrightarrow{x} = T(\overrightarrow{x})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est surjective,
2. Tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire des colonnes de $A \Leftrightarrow \mathrm{span}\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\} = \mathbb{R}^m$
3. A possède un pivot dans chaque ligne.

1.3.1.3 Bijectivité

Si $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est injective et surjective $\Leftrightarrow T$ est bijective.

1.3.2 Noyau et image d'une application

Définition 6. Soit $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Le *noyau* de T, noté $\ker(T)$, est définit par

$$\ker(T) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \colon T(\overrightarrow{x}) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

L'*image* de T, notée $\mathrm{Im}(T)$, est définie par

$$\mathrm{Im}(T) = \{\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m \colon \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}\} \subseteq \mathbb{R}^m \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Calcul matriciel

Rappel : L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels se dénote $\mathbb{R}^{m \times n}$ où m est le nombre de lignes et n le nombre de colonnes.

2.1 Transposée

Propriétés : Soient A et B telles que AB existe. Alors

i. $(A^T)^T = A$

ii. $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

iv. $(AB)^T = B^T A^T$

2.2 Inverse

Définition 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est inversible s'il existe $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$AB = BA = I_n \tag{2.1}$$

L'inverse est unique et elle est notée A^{-1}. On a $B = A^{-1}$.

Théorème 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible
2. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n,\ A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution donnée par $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n \Rightarrow \text{span}\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\} = \mathbb{R}^n$
4. A possède un pivot par ligne et par colonne (A possède n pivots)
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
6. L'équation $A\vec{x} = 0$ possède une unique solution $\vec{s} = 0$
7. On peut passer de A à I_n avec des opérations sur les lignes $\Rightarrow A \sim I_n$
8. A est un produit de matrices élémentaires
9. L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective
10. L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective
11. A^T est inversible

2.2.1 Calcul de l'inverse d'une matrice où $n = 2$

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

où $\det(A) = ad - bc$.

2.2.2 Calcul de l'inverse d'une matrice où $n > 2$

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible. A inversible $\Leftrightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ et on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \end{pmatrix}$. On a alors

$$AA^{-1} = A\begin{pmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{v_1} & \cdots & A\vec{v_n} \end{pmatrix} = I_n$$

Comme $I_n = \begin{pmatrix} \vec{e_1} & \cdots & \vec{e_n} \end{pmatrix}$, on a $A\vec{v_i} = \vec{e_i}\ \forall i = 1, \ldots, n$ qui est une équation matricielle à résoudre pour trouver $\vec{v_i}$. Étant donné que A est inversible, le système est compatible et possède n pivots. Avec l'AR, on a $A \sim \cdots \sim I_n$ qui est la forme échelonnée réduite de A. La matrice augmentée associée à $A\vec{v_i} = \vec{e_i}$ est

$$(A|\vec{e_i}) \sim \cdots \sim (I_n|\vec{v_i})$$

qui devient, lorsqu'on pose tout les $\vec{e_i}$,

$$(A|\vec{e_1} \cdots \vec{e_n}) \sim \cdots \sim (I_n|\vec{v_1} \cdots \vec{v_n})$$

Autrement dit,

$$(A|I_n) \sim \cdots \sim (I_n|A^{-1}) \tag{2.3}$$

Cela consiste à appliquer l'AR à la matrice augmentée $(A|I_n)$.

2.3 Composition de fonctions

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ associée à la transformation linéaire T_A et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ associée à la transformation linéaire T_B.

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\longmapsto A\vec{x} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T_B\colon \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\longmapsto B\vec{x} \end{aligned}$$

Alors la matrice canonique associée à la transformation composée de T_A et T_B est issue de la multiplication matricielle des matrices A et B. On a

$$T_A(T_B(\vec{x})) = A(B\vec{x}) = AB\vec{x} \tag{2.4}$$

Remarque l'ensemble de départ est $\mathbb{R}^p$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^m$. La taille de la matrice AB peut être trouvée avec $m \times \cancel{n}, \cancel{n} \times p \to m \times p$

2.4 Décomposition LU

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Avec l'algorithme de réduction. on à $A \sim \cdots \sim U$ où $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une forme échelonnée de A. On va pouvoir factoriser A en

$$A = LU \tag{2.5}$$

où $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$. On a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}}_{U} \tag{2.6}$$

Si $A = LU$, $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$ et on pose

$$U\vec{x} = \vec{y} \text{ et } L\vec{y} = \vec{b} \tag{2.7}$$

2.4.1 Méthode de décomposition

1. On échelonne A avec $L_j \leftarrow L_j + kL_i$ où $i < j$. On obtient $A \sim \cdots \sim U$.
2. Chaque opération élémentaire (r) est associé réspectivement à sa matrice élémentaire E_r. On a $E_p \cdots E_2 E_1 A = U$.
3. On forme L en multipliant I_m par les matrices élémentaires inversées $E_p^{-1}, E_{p-1}^{-1}, \ldots$ succéssivement. $I_m \sim \cdots \sim L$, autrement dit $E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_p^{-1} I_m = L$.

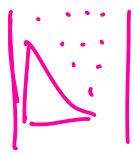
2.4.2 Méthode rapide

On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & & & \vdots \\ \ell_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \ell_{m1} & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$

On suppose que A possède m pivots. Si A possède $p < m$ pivots, alors on utilise la méthode en 2.4.1.

Etape 1 : Si $a_{11} \neq 0$ on pose $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $i = 2, \ldots, m$.

Etape 2 : $A \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ Echelone...



Etape 3 : Si $a_{22} \neq 0$ on pose $\ell_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}$ $i = 3, \ldots, m$. Si $a_{22} = 0$ on regarde si L_2 possède un pivot, qui pourrait être a_{23} et dans ce cas $\ell_{i2} = \frac{a_{i3}}{a_{23}}$ $i = 3, \ldots, m$.

Etapes suivantes : Etc. pour les autres colonnes pivots.

Chapitre 3

Déterminants

Remarque : On ne considère que des matrices carrées, de taille $n \times n$.

3.1 Calcul du déterminant

3.1.1 Lorsque $n = 2$

Soit A une matrice 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A noté $\det(A)$ vaut

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{3.1}$$

3.1.2 Lorsque $n = 3$

Soit A une matrice 3×3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A vaut

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

3.1.3 Cas général

Définition 1. On appelle A_{1j} la matrice des cofacteurs de A par rapport à la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Elle s'obtient à partir de A en éliminant la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Exemple : Pour une matrice 4×4,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

on a que

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Définition 2. On appelle déterminant la fonction qui associe à toute matrice carrée un nombre (appelé determinant). On a que

-1^3

1. $\det((a)) = a$
2. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ on a

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}|$$

$$\Leftrightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j}|A_{1j}| \tag{3.3}$$

3.1.4 Cas particuliers

Si A est une matrice diagonale de taille $n \times n$ alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \tag{3.4}$$

Si A est une matrice triangulaire (inf./sup.) de taille $n \times n$ alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \tag{3.5}$$

Remarque : Si $a_{ii} = 0$ alors $\det(A) = 0$ et A n'est pas inversible.

3.2 Propriétés du déterminant

Théorème 1. Soient A, B deux matrices $n \times n$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{3.6}$$

Théorème 2. Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et E une matrice élémentaire. On a

$$\det(EA) = \det(E)\det(A) \tag{3.7}$$

avec $\det(E) = \begin{cases} -1 & \text{si type 1} \\ \alpha & \text{si type 2} \\ 1 & \text{si type 3} \end{cases}$

Chapitre 4

Espaces vectoriels

Définition 1. On appelle espace vectoriel un ensemble non vide V, composé d'éléments sur lesquels sont définis une opération d'addition et une opération de multiplication par scalaire. On les notes :

$$\begin{aligned} \text{« + »} : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \text{« • »} : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\longmapsto \alpha v \end{aligned}$$

On appelle les éléments de V les vecteurs. Les opérations vérifient les 10 axiomes.

Soient $u, v, w \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. Il existe un élément de V, noté 0, tel que $v + 0 = v$. C'est l'élément nul.
5. $\forall v \in V$, il existe un élément inverse, noté $-v$, tel que $v + (-v) = 0$
6. $\alpha v \in V$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
9. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v = \alpha\beta v$
10. $1u = u$

Propriétés :

1. L'élément nul de V, noté 0_V, est unique.
2. L'élément inverse de $v \in V$, noté $-v$, est unique.
3. $0v = 0_V$ où 0 est le zéro scalaire et 0_V est l'élément nul de V.
4. $\alpha\, 0_V = 0_V$
5. $(-1)v = -v$

4.1 Sous-espace vectoriel

Définition 2. Soit V un espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel une partie W de V tel que :

1. L'élément nul de V doit être dans W, i.e. $0_V \in W$.
2. Si $u, v \in W$ alors $u + v \in W$
3. Si $u \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha u \in W$

Remarque : Les propriétés d'un sous-espace vectoriel W assurent que W est un espace vectoriel. Autrement dit

$$\text{sous-espace vectoriel} \Rightarrow \text{espace vectoriel}$$

4.1.1 Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels. On le note aussi $\mathbb{R}^{m\times n}$.
- $\mathbb{P}_n$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. $\mathbb{P}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

4.1.2 Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie d'espace vectoriel

Théorème 1. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des éléments d'un espace vectoriel V. Alors on a que $\text{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

Définition 3. On dira que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est la/une famille génératrice de $\text{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

4.2 Applications linéaires

4.2.1 Noyau et image

Définition 4. (*noyau*) Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, noté $\ker(A)$, est l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = 0$, i.e.

$$\ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\} \tag{4.1}$$

Théorème 2. Le noyau d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est un sous-espace vectoriel.

Définition 5. (*image*) On appelle image de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ l'espace engendré par les colonnes de A, noté $\text{Im}(A)$ ou $\text{col}(A)$. Si $A = \begin{pmatrix}\vec{a_1} & \cdots & \vec{a_n}\end{pmatrix}$ où $\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m \forall i = 1, \ldots, m$, on a

$$\text{Im}(A) = \text{span}\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\} \tag{4.2}$$

Théorème 3. $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

4.2.2 Application linéaire

Définition 6. Soit $T\colon V \longrightarrow W$, T est une application linéaire si à tout vecteur de V est associé un unique élément $T(V)$ de W qui vérifie

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

4.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 7. Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de V. Alors $\mathcal{B}$ est une base de V si

1. $\mathcal{B}$ est une famille libre.
2. $\mathcal{B}$ engendre V, i.e. $\text{span}\{v_1, \ldots, v_p\} = V$.

Théorème 4. (*base extraite*) Soient V un espace vectoriel, $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille de p vecteurs de V, et $W = \text{span}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Alors :

1. Si un des vecteurs de S, disons v_k, s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de S, $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_p\}$ reste un ensemble (une famille) générateur de W.
2. Si $W \neq \{0\}$, alors il existe une sous-famille extraite de S qui est une base de W.

Remarque : Si $W = \{0\}$ on a que W n'as pas de base.

4.3.1 Bases du noyau et de l'image

Pour $\ker(A)$: nb. de variables libres = nb. de vecteurs de la base de $\ker(A)$.

Lemme Soient A une matrice et B sa forme échelonnée. Alors :

i. Les colonnes pivots de B sont linéairement indépendantes.

ii. Les colonnes qui ne sont pas pivots sont des combinaisons linéaires des autres.

iii. Les colonnes de A qui correspondent aux colonnes pivots de B sont linéairement indépendantes.

Constat Les opérations élémentaires préservent les relations de (in-)dépendance linéaire des colonnes. Donc pour trouver une base de $\text{Im}(A)$:

1. Echelonner A.
2. Trouver les colonnes pivot.
3. Les colonnes de A qui correspondent aux pivots forment une base de $\text{Im}(A)$.

4.3.2 Systèmes de coordonnées

Notation : $S = \{a, b, c\}$ est un ensemble contenant a, b et c où l'ordre ne compte pas (c.f. span). $S = (a, b, c)$ est un ensemble contenant a, b et c où l'ordre compte (c.f. les solutions $S = (s_1, \ldots, s_n)$).

$[v]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur v dans la base $\mathcal{B}$. On note $[v]_E = v$ lorsque v est dans la base canonique E.

Théorème 5. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, une base d'un espace vectoriel V. $\forall v \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ uniques, tels que $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$.

Définition 8. Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les composantes, ou coordonnées, de v dans la base $\mathcal{B}$. On note

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

4.3.2.1 L'application coordonnée

Définition 9. Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de V. Si $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, alors $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$ et on peut exprimer v sous forme vectorielle

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

On définit l'application coordonnée :

$$\begin{aligned} [\bullet]_{\mathcal{B}} \colon V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Théorème 6. $[\bullet]_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire et bijective.

Définition 10. Un isomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel vers un autre espace vectoriel.

Remarque : $[\bullet]_{\mathcal{B}}$ est un exemple d'isomorphisme.

4.4 Changement de base

4.4.1 Matrice de changement de base

Définition 11. (*matrice de passage*) Soient V un espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (b1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ des bases de V. On note $P_{\mathcal{CB}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est telle que

$$P_{\mathcal{CB}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}} \tag{4.6}$$

La matrice de passage prends ses valeurs des vecteurs de base :

$$P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

4.4.1.1 Inverse

La matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est l'inverse de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

$$(P_{\mathcal{CB}})^{-1} = P_{\mathcal{BC}} \tag{4.8}$$

Ainsi, on a que

$$(P_{\mathcal{CB}})^{-1}[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}} \tag{4.9}$$

4.4.1.2 Dans la base canonique

Lorsque $\mathcal{C} = E = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ on a que

$$P_{E\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{v}]_E \tag{4.10}$$

et

$$P_{E\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\vec{b_1}]_E & \cdots & [\vec{b_n}]_E \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

4.4.2 Généralisation aux espaces vectoriels

Soient V un espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ des bases de V.

i. Soit $v \in V$. $\exists\, \gamma_i \in \mathbb{R}$ tels que $v = \gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_n c_n$.
   Trouvons $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
   On doit résoudre $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ où $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et $[v]_{\mathcal{B}}$ est l'inconnue.

ii. Soit $v \in V$. Supposons $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$.
   Trouvons $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$
   On doit résoudre $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ où $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ et $[v]_{\mathcal{C}}$ est l'inconnue. Dans ce cas on a une multiplication matricielle.

4.5 Dimensions d'un espace vectoriel

Théorème 7. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est forcément linéairement dépendante.

Théorème 8. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V. Alors toute autre base de V possède n éléments.

Définition 12. (*dimension*) Soit V un espace vectoriel.

1. Si V est généré ou engendré par une famille finie d'éléments de V, on dira que V est de dimension finie. On note sa dimension $\dim(V) \in \mathbb{N}$ qui est le nombre d'éléments dans sa base.
2. Si V n'est pas généré par une famille finie d'éléments de V, on dira que V est de dimension infinie.

4.5.1 Dimension du noyau et de l'image

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, avec $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} & \cdots & \vec{a_n} \end{pmatrix}$, $\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ alors $\dim \mathrm{Im}(A) \leqslant m$.
   $\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ n'est pas forcément une base de $\mathrm{Im}(A)$. On doit trouver les colonnes pivot.
   Donc $\dim \mathrm{Im}(A)$ est égal au nombre de colonnes pivot.

2. $\ker(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{v} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. On résout $A\vec{v} = 0$ et le nombre de variables libres est égal au nombre d'éléments dans une base de $\ker(A)$. Or,

$$\text{variable libre} \Leftrightarrow \text{colonnes non pivot}$$

Donc $\dim\ker(A)$ est égal au nombre de colonnes non pivot.

Définition 13. (*rang*) Soit $T\colon V \longrightarrow W$, une application linéaire. On appelle $\dim\operatorname{Im}(T)$ le rang de T, noté $\operatorname{rang}(T) = \dim\operatorname{Im}(T)$.

Si T est matricielle ($T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$), alors

$$\dim\operatorname{Im}(T) = \dim\operatorname{Im}(A) \Rightarrow \operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(A) \tag{4.12}$$

Théorème 9. (*théorème du rang)*

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, alors
$$\dim\ker(A) + \operatorname{rang}(A) = n \tag{4.13}$$
2. Soit $T\colon V \longrightarrow W$ où $\dim(V) = n$,
$$\dim\ker(T) + \operatorname{rang}(T) = n \tag{4.14}$$

Théorème 10. (*matrices inversibles*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. $\operatorname{rang}(A) = n$
3. $\dim\ker(A) = 0$

4.5.2 Espaces des lignes d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La decomposition selon les lignes de A est

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Lgn}_1(A) \\ \vdots \\ \operatorname{Lgn}_m(A) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

De plus

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Lgn}_1^{\mathrm{T}}(A) & \cdots & \operatorname{Lgn}_m^{\mathrm{T}}(A) \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

où $\operatorname{Lgn}_i^{\mathrm{T}}(A) \in \mathbb{R}^n \; \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Définition 14. Le sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A est

$$\operatorname{Lgn}(A) = \operatorname{span}\{\operatorname{Lgn}_1^{\mathrm{T}}(A), \ldots, \operatorname{Lgn}_m^{\mathrm{T}}(A)\} \text{ et } \operatorname{Lgn}(A) \subseteq \mathbb{R}^n \tag{4.17}$$

Théorème 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\dim \operatorname{Lgn}(A) = \dim \operatorname{Im}(A) \tag{4.18}$$

c'est-à-dire,

$$\operatorname{rang}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rang}(A) \tag{4.19}$$

Théorème 12. Si A est équivalent à B selon les lignes, alors leurs lignes engendrent le même espace.

4.6 Matrice d'application et changement de base

Soient V, W des espaces vectoriels avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une base de W. Soit $T\colon V \longrightarrow W$ une application linéaire. On appelle M la matrice qui représente T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on a

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}} \tag{4.20}$$

où $M = \begin{pmatrix}[T(b_1)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [T(b_n)]_{\mathcal{C}}\end{pmatrix}$ et $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$

Chapitre 5

Valeurs et vecteurs propres

5.1 Introduction

Définition 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre si $\vec{v} = 0$ et si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{5.1}$$

et λ s'appelle la valeur propre associée à $\vec{v}$.

Remarque : λ peut être nulle mais pas $\vec{v}$.

Définition 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Alors E_λ est l'espace propre à λ. Il est définit par

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) \tag{5.2}$$

Théorème 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
λ est une valeur propre $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

Définition 3. $\det(A - \lambda I) = 0$ s'appelle l'équation caractéristique. On pose

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{5.3}$$

où $p_A(\lambda) \in \mathbb{P}_n$ est le polynôme caractéristique.

Théorème 2. Pour les matrices triangulaires ou diagonales, les valeurs propres sont sur la diagonale.

Théorème 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinctes, $r \leqslant n$. Alors $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_r}$, les vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ respectivement, sont linéairement indépendants.

Théorème 4. $\lambda = 0$ est une valeur propre $\Leftrightarrow$ A est singulière.

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & * & * \\ * & b-\lambda & * \\ * & * & c-\lambda \end{pmatrix}$$

5.1.1 Calcul des vecteurs propres

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

i. On détermine les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ issues de $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

ii. On détermine les espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ avec $E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)$.

iii. Les vecteurs formant le span des E_{λ_i} sont $\overrightarrow{v_{\lambda_i}}$. On obtient $\overrightarrow{v_{\lambda_1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\lambda_n}}$.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & * & * \\ * & b-\lambda & * \\ * & * & c-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

5.2 Matrices semblables

Définition 4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. S'il existe P de taille $n \times n$, inversible et telle que

$$B = P^{-1}AP \tag{5.4}$$

On dira que A est semblable à B.

Théorème 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ semblables $\Rightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ et A, B possèdent les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

Remarque : mêmes valeurs propres $\not\Rightarrow$ semblables.

5.3 Diagonalisation

Définition 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A est semblable à D, une matrice diagonale, on dira que A est diagonalisable et

$$D = P^{-1}AP \tag{5.5}$$

Remarque : On a alors que $A = PDP^{-1}$. Toute matrice $n \times n$ n'est pas forcément diagonalisable

Théorème 6. (*critère de diagonalisation*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

(lin. indep)

$$A \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow A \text{ admet } n \text{ vecteurs propres libres} \tag{5.6}$$

Remarque : A possède n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Théorème 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Remarque : Mais

- A diagonalisable $\not\Rightarrow$ A possède n valeurs propres distinctes,
- A ne possède pas n valeurs propres distinctes $\not\Rightarrow$ A diagonalisable,

et dans ce cas il faut trouver les espaces propres et voir si les n vecteurs propres sont linéairement indépendants.

Théorème 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si $p_A(\lambda)$ admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec leur multiplicité (λ_i et λ_j pourraient être les mêmes valeurs), alors

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \dim E_{\lambda_i} = m_{\lambda_i} \tag{5.7}$$

où m_{λ_i} est la multiplicité de λ_i pour les valeurs propres λ_i distinctes.

Théorème 9. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A est symétrique alors elle est diagonalisable.

5.3.1 Methode de diagonalisation

On cherche les valeurs propres puis les vecteurs propres. On a ensuite

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

et si $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ sont les vecteurs propres linéairement indépendants associés alors

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

5.4 Applications linéaires et valeurs propres

On cherche à interpréter PDP^{-1} comme une application linéaire.

Théorème 10. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A est diagonalisable en $D = P^{-1}AP$ (donc D est diagonalisable). Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P. Alors D est la matrice de l'application

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{u} &\longmapsto A\vec{u} \end{aligned}$$

dans la base $\mathcal{B}$. C'est à dire, si $\mathcal{B} = (\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n})$ alors

$$D = \begin{pmatrix} [T(\vec{b_1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\vec{b_n})]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Théorème 11. (*spectral*) A symmétrique $\Rightarrow$ A diagonalisable.

Théorème 12. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisable en $D = P^{-1}AP$. Si $\mathcal{B}$ est la base formée des colonnes de P, on a que D est la matrice de l'application $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Decomp SVD
Complement Schur
Gram-Schmidt
Injectif, surjectif, etc...
bases et preuves.
Decomp Spectrales
Blocs

Diagonalisation
Moindres carrés
QR

Chapitre 6

Orthogonalité et moindres carrés

6.1 Produit scalaire

Définition 1. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. On définit le produit scalaire par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n \tag{6.1}$$

où $\vec{u} \bullet \vec{v} \in \mathbb{R}$.

Remarque : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{v}$

6.1.1 Norme d'un vecteur

Définition 2. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Sa norme est le scalaire positif ou nul donné par

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \tag{6.2}$$

Remarques :

i. $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$

ii. $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$

iii. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$

6.2 Orthogonalité

Définition 3. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \tag{6.3}$$

6.2.1 Orthogonalité à un sous-espace vectoriel

Définition 4. Soient $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Si $\vec{u}$ est tel que $\vec{u} \bullet \vec{w} = 0 \; \forall \vec{w} \in W$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à W. L'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux à W est noté $W^{\perp}$ et

$$W^{\perp} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \colon \vec{u} \bullet \vec{w} = 0, \; \forall \vec{w} \in W\} \tag{6.4}$$

Th. 58.

Théorème 1. Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors

1. $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. $W \cap W^\perp = \{0\}$. $\dim W + \dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n$

Théorème 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ donnée par $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} & \cdots & \vec{a_n} \end{pmatrix}$, $\vec{a_i} \in \mathbb{R}^m$.

Soient
$$\begin{aligned} \ker(A) &= \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n : A\vec{u} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \operatorname{Im}(A) &= \operatorname{span}\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\} \subseteq \mathbb{R}^m \\ \operatorname{Lgn}(A) &= \operatorname{span}\{\operatorname{Lgn}_1^{\mathrm{T}}(A), \dots, \operatorname{Lgn}_m^{\mathrm{T}}(A)\} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Alors

1. $\operatorname{Lgn}(A)^\perp = \ker(A)$
2. $\operatorname{Im}(A)^\perp = \ker(A^{\mathrm{T}})$

Th. 59.

6.3 Familles orthogonales et projections orthogonales

Remarque : La base de W doit être orthogonale.

Définition 5. Une famille de vecteurs $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite orthogonale si

$$\vec{u_i} \bullet \vec{u_j} = 0 \ \forall i, j = 1, \dots, p \text{ et } i \neq j \tag{6.5}$$

Théorème 3. Soit $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{u_i} \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, p$ alors $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ est libre.

Remarque : $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ est une base de $W = \operatorname{span}\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mais $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ n'est pas forcément une base de $\mathbb{R}^n$.

Th. 61 **Théorème 4.** Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ une base orthogonale de W. Alors $\forall \vec{w} \in W$, $\vec{w} = \alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_p \vec{v_p}$ avec $\alpha_i = \frac{\vec{w} \bullet \vec{v_i}}{\vec{v_i} \bullet \vec{v_i}}$ $\forall i = 1, \dots, p$.

6.3.1 Projections orthogonales

Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \in W$. On note $\mathrm{P}_W(\vec{v})$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur W. On a que $\mathrm{P}_W(\vec{v})$ est

i. l'unique vecteur tel que $\vec{v} - \mathrm{P}_W(\vec{v})$ est orthogonal à W,

ii. l'unique vecteur de W qui minimise la distance $\|\vec{v} - \mathrm{P}_W(\vec{v})\|$ entre $\vec{v}$ et W.

Théorème 5. Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Alors tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme la somme de deux vecteurs $\vec{v} = \vec{u} + \vec{z}$ où $\vec{u} \in W$ et $\vec{z} \in W^\perp$. On a $\vec{u} = \mathrm{P}_W(\vec{v})$ et $\vec{z} = \vec{v} - \mathrm{P}_W(\vec{v})$. Plus précisément, si $W = \operatorname{span}\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ avec $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ une base orthogonale, alors

$$\mathrm{P}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u_1}}{\vec{u_1} \bullet \vec{u_1}} \vec{u_1} + \dots + \underbrace{\frac{\vec{v} \bullet \vec{u_p}}{\vec{u_p} \bullet \vec{u_p}}}_{\alpha_i} \vec{u_p} \tag{6.6}$$

Soit $P_W(\vec{v}) = \alpha_i \cdot \vec{u}_p$ ou $\vec{u} \in W$

$P_W(\vec{v}) = \sum_{i,p} \alpha_i \cdot \vec{u}_p = \sum_i \frac{\vec{v}_i \bullet \vec{u}_i}{\vec{u}_i \bullet \vec{u}_i} \vec{u}_i$

Théorème 6. Soit $U = \begin{pmatrix} \vec{u_1} & \cdots & \vec{u_n} \end{pmatrix}$, $\vec{u_i} \in \mathbb{R}^m$ et $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors les colonnes $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}$ sont orthonormées $\Leftrightarrow U^{\mathrm{T}}U = I_n$.

Remarque : $\underbrace{U^{\mathrm{T}}U}_{n\times n} \neq \underbrace{UU^{\mathrm{T}}}_{m\times m}$. De plus $U^{\mathrm{T}}U = I_n \not\Rightarrow UU^{\mathrm{T}} = I_m$.

Théorème 7. Soit $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dont ses colonnes sont orthonormées. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors

1. $\|U\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$
2. $(U\vec{v})\bullet(U\vec{u}) = \vec{v}\bullet\vec{u}$
3. $U\vec{v}\bullet U\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}\bullet\vec{u} = 0$

6.3.2 Meilleure approximation

Théorème 8. Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Soit $\mathrm{P}_W(\vec{v}) \in W$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ dans W.

On va dire que $\mathrm{P}_W(\vec{v})$ est la meilleure approximation de $\vec{v}$ dans W (le point de W le plus proche de $\vec{v}$). C'est à dire $\|\vec{v} - \mathrm{P}_W(\vec{v})\| \leqslant \|\vec{v} - \vec{w}\|,\ \forall \vec{w} \in W$.

Théorème 9. Soit $W \in \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $W = \mathrm{span}\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}\}$, où $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}\}$ est une base orthonormée, alors $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{P}_W(\vec{v}) = UU^{\mathrm{T}}\vec{v} \tag{6.7}$$

où $U = \begin{pmatrix} \vec{u_1} & \cdots & \vec{u_n} \end{pmatrix}$ est de taille $n \times p$.

Remarques :

i. $U^{\mathrm{T}}U = I_p$ et $U^{\mathrm{T}}U\vec{w} = I_p\vec{w}\ \forall \vec{w} \in \mathbb{R}^p$
   $UU^{\mathrm{T}}\vec{v} = \mathrm{P}_W(\vec{v})\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

ii. si $W = \mathbb{R}^n$ alors $UU^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}U = I_n$.

Définition 6. Une matrice $n \times n$ inversible telle que $U^{\mathrm{T}}U = I_n$ (et donc $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$) est dite orthogonale et ses colonnes sont orthonormales.

6.4 Gram-Schmidt

Précédemment, toutes les bases étaient orthogonales. Gram-Schmidt permet d'effectuer des projections avec des bases non orthogonales.

6.4.1 Théorème de Gram-Schmidt

Théorème 10. Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ une base de W. On peut construire une base orthogonale en suivant le procédé de Gram-Schmidt :

— $\vec{u_1} = \vec{v_1},\ W_1 = \mathrm{span}\{\vec{u_1}\}$
— $\vec{u_2} = \vec{v_2} - \mathrm{P}_{W_1}(\vec{v_2}),\ W_2 = \mathrm{span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$
— $\vec{u_3} = \vec{v_3} - \mathrm{P}_{W_2}(\vec{v_3}),\ W_3 = \mathrm{span}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$
— $\vdots$
— $\vec{u_p} = \vec{v_p} - \mathrm{P}_{W_{p-1}}(\vec{v_p})$

La famille $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}\}$ est une base orthogonale de W.

6.4.2 Méthode générale pour les projections

Si $W = \text{span}\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ et l'on cherche la projection de $\vec{h}$ sur W.

1. Vérifier si $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ est une base (est-elle libre et forme-t-elle W).
2. Vérifier si $\vec{v_i} \bullet \vec{v_j} = 0 \ \forall i \neq j$, donc que $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ est orthogonale.
3. Si ce n'est pas le cas, orthogonaliser la base avec Gram-Schmidt.
4. Faire la projection.

6.5 Moindres carrés

On considère $A\vec{x} = \vec{b}$ incompatible $\Rightarrow \vec{b} \notin \text{Im}(A)$. On va chercher à approximer $\vec{b}$, donc trouver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{6.8}$$

Le $A\vec{x}$ le plus proche de $\vec{b}$ correspond à $\mathrm{P}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$. Donc pour trouver la solution $\vec{x}$, on résout

$$A\vec{x} = \mathrm{P}_{\text{Im}(A)}(\vec{b}) \tag{6.9}$$

Définition 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. On appelle solution au sens des moindres carrés de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leqslant \|\vec{b} - A\vec{x}\| \tag{6.10}$$

Théorème 11. L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$ est égale à l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale

$$A^{\mathrm{T}}A\vec{x} = A^{\mathrm{T}}\vec{b} \tag{6.11}$$

Donc soit on résout $A\vec{x} = \mathrm{P}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$, soit on résout $A^{\mathrm{T}}A\vec{x} = A^{\mathrm{T}}\vec{b}$.

Théorème 12. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.
2. $A^{\mathrm{T}}A$ est inversible.
3. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Dance ce cas, $\hat{x}$ la solution au sens des moindres carrés est donnée par

$$\hat{x} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\vec{b} \tag{6.12}$$

Chapitre 7

Matrices symétriques et forme quadratique

7.1 Théorème spectral

Théorème 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmétrique. Alors on a

1. A admet n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes).
2. Pour chaque valeur propre distincte on a
$$\dim E_{\lambda_i} = m_i \tag{7.1}$$
où m_i est la multiplicité de λ_i.
3. A est diagonalisable en base orthonormale.
4. Les espaces propres E_{λ_i} sont deux à deux orthogonaux :
$$E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j} \tag{7.2}$$
$\forall i \neq j$.

Remarque : Si 1., 2. ou 4. sont vrais, on a pas forcément que A est symmétrique. En revanche, si 3. est vrai, alors A est symmétrique. De plus, si 1., 2. et 4. sont vrais, alors 3) est vrai et donc A est symmétrique.

7.2 Décomposition spectrale

Si A est symmétrique, on peut décomposer A en parties qui dépendent des valeurs propres.

Si $A = PDP^{\mathrm{T}}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} & \cdots & \overrightarrow{u_2} \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale.

$$A = PDP^{\mathrm{T}} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}^{\mathrm{T}} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{u_n}\overrightarrow{u_n}^{\mathrm{T}} \tag{7.3}$$

On a que $\overrightarrow{u_i}\overrightarrow{u_i}^{\mathrm{T}}$ est une matrice de taille $n \times n$ de rang 1.

Chapitre 8

Methodes rapides de résolution de problèmes

8.1 Caractérisations de systèmes matriciels

Rappel pour une matrice $m \times n$, m désigne le nombre de lignes et n le nombre de colonnes.

Le théorème du rang pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\dim \ker(A) + \operatorname{rang}(A) = n$$

8.1.1 Taille des matrices

Soit $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Les matrices suivantes sont associées à la transformation T.

8.1.1.1 $m = n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{éq}} = n_{\text{var}}$$

Transformation linéaire associée : Si $\dim \ker(T) = 0$ alors $\operatorname{rang}(T) = n$ et la matrice engendre $\mathbb{R}^m$ (la base d'arrivée). Si $\dim \ker(T) \geqslant 1$ alors $\operatorname{rang}(T) = n - \dim \ker(T)$ et la matrice n'engendre pas $\mathbb{R}^m$ (la base d'arrivée).

8.1.1.2 $m > n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{éq}} > n_{\text{var}}$$

Transformation linéaire associée : D'office, la matrice ne pourra pas engendrer $\mathbb{R}^m$ car il n'y a pas assez de variables. On donc que $\text{rang}(T) \leqslant n$.

8.1.1.3 $m < n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{éq}} < n_{\text{var}}$$

Transformation linéaire associée : Il y a trop de variables par rapport au nombre d'équations. On aura donc des variables libres. On a donc que $\dim\ker(T) \geqslant n - m$ et si $\underbrace{\text{rang}(T)}_{\text{Dim Im}(T)} = m$ on aura que $\dim\ker(T) = n - m$.

rang = nb pivots.

8.2 Valeurs propres

8.2.1 Trace

On a que pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$-\frac{\text{tr}(A)}{(-1)^n} = \sum_i \lambda_i \tag{8.1}$$

Autrement dit, $\sum_i \lambda_i = -\text{tr}(A)$ si n est pair et $\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A)$ si n est impair.

8.2.2 Diagonale et déterminant

Pour les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ carrées mais pas forcément diagonales,

$$\prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.2}$$

De plus, lorsque $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonale, le produit de la diagonale $\prod_i a_{ii}$ est égal au produit des valeurs propres, et donc

$$\prod_i a_{ii} = \prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.3}$$

8.2.3 Somme des coefficients des lignes

Si la somme des coefficients sur chaque ligne est la même, alors la valeur de cette somme est une valeur propre.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour L_1, la somme $3+1+1+1 = 6$, pour L_2 la somme $1+3+1+1 = 6$. On a la même chose pour L_3 et L_4 et donc $\lambda = 6$ est une valeur propre du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Transformation linéaire associée : D'office, la matrice ne pourra pas engendrer $\mathbb{R}^m$ car il n'y a pas assez de variables. On donc que $\text{rang}(T) \leqslant n$.

8.1.1.3 $m < n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{éq}} < n_{\text{var}}$$

Transformation linéaire associée : Il y a trop de variables par rapport au nombre d'équations. On aura donc des variables libres. On a donc que $\dim \ker(T) \geqslant n - m$ et si $\text{rang}(T) = m$ on aura que $\dim \ker(T) = n - m$.

8.2 Valeurs propres

Spectre = Ensemble des V.p.

8.2.1 Trace

On a que pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$-\frac{\text{tr}(A)}{(-1)^n} = \sum_i \lambda_i \tag{8.1}$$

Autrement dit, $\sum_i \lambda_i = -\text{tr}(A)$ si n est pair et $\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A)$ si n est impair.

8.2.2 Diagonale et déterminant

Pour les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ carrées mais pas forcément diagonales,

$$\prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.2}$$

De plus, lorsque $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonale, le produit de la diagonale $\prod_i a_{ii}$ est égal au produit des valeurs propres, et donc

$$\prod_i a_{ii} = \prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.3}$$

8.2.3 Somme des coefficients des lignes

Si la somme des coefficients sur chaque ligne est la même, alors la valeur de cette somme est une valeur propre.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour L_1, la somme $3+1+1+1 = 6$, pour L_2 la somme $1+3+1+1 = 6$. On a la même chose pour L_3 et L_4 et donc $\lambda = 6$ est une valeur propre du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Transformation linéaire associée : D'office, la matrice ne pourra pas engendrer $\mathbb{R}^m$ car il n'y a pas assez de variables. On donc que $\text{rang}(T) \leqslant n$.

8.1.1.3 $m < n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{éq}} < n_{\text{var}}$$

Transformation linéaire associée : Il y a trop de variables par rapport au nombre d'équations. On aura donc des variables libres. On a donc que $\dim\ker(T) \geqslant n - m$ et si $\text{rang}(T) = m$ on aura que $\dim\ker(T) = n - m$.

8.2 Valeurs propres

8.2.1 Trace

On a que pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$-\frac{\text{tr}(A)}{(-1)^n} = \sum_i \lambda_i \tag{8.1}$$

Autrement dit, $\sum_i \lambda_i = -\text{tr}(A)$ si n est pair et $\sum_i \lambda_i = \text{tr}(A)$ si n est impair.

8.2.2 Diagonale et déterminant

Pour les matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ carrées mais pas forcément diagonales,

$$\prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.2}$$

De plus, lorsque $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est diagonale, le produit de la diagonale $\prod_i a_{ii}$ est égal au produit des valeurs propres, et donc

$$\prod_i a_{ii} = \prod_i \lambda_i = \det(A) \tag{8.3}$$

8.2.3 Somme des coefficients des lignes

Si la somme des coefficients sur chaque ligne est la même, alors la valeur de cette somme est une valeur propre.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour L_1, la somme $3+1+1+1 = 6$, pour L_2 la somme $1+3+1+1 = 6$. On a la même chose pour L_3 et L_4 et donc $\lambda = 6$ est une valeur propre du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.