

Broad Repertoire of Universal Hypothesis
Series of Hypothetical or International Theorems
For
Physique Générale I: Mécanique

Joakim Spadola

BA1 - GM - Automne 2019

Table des matières

	Page
1 Opérations vectorielles	1
2 Lois de Newton et balistique	2
2.1 Lois de Newton	2
2.2 Balistique.....	3
2.2.1 Sans frottements	3
2.2.2 Avec frottements	3
3 Oscillateur Harmonique	4
3.1 Non-amorti et non-forcé	4
3.1.1 Loi de Hooke	4
3.1.2 Equation différentielle et solution	4
3.2 Amorti et non-forcé.....	5
3.2.1 Equation différentielle	5
3.3 Amorti et forcé.....	6
3.3.1 Solution complète.....	6
3.4 Pendule simple	7
4 Énergie	8
4.1 Travail	8
4.1.1 Segment	8
4.1.2 Segments multiples	8
4.1.3 Segments infinitésimaux.....	8
4.2 Puissance instantanée	9
4.3 Potentiel	9
4.4 Energie cinétique.....	9
4.5 Energie mécanique.....	9
4.5.1 Théorème.....	9
5 Rotations	10
5.1 Matrices de rotation dans \mathbb{R}^2	10
5.1.1 Rotation du point, le repère reste fixe	10
5.1.2 Rotation du repère, le point reste fixe	10
5.2 Matrices de rotation dans \mathbb{R}^3	10
5.2.1 Rotation du point, le repère reste fixe	10
5.2.2 Rotation du repère, le point reste fixe	11

5.2.3	Généralisation pour les rotations	11
5.3	Formule de Poisson	12
5.4	Coordonnées cylindriques et sphériques	12
5.4.1	Repère cylindrique.....	12
5.4.2	Repère sphérique	13
6	Corps solides et inertie	14
6.1	Moment cinétique.....	14
6.1.1	O fixe dans un référentiel Galiléen	14
6.1.2	Au centre de masse G	14
6.2	Moment de force	15
6.3	Théorème du moment cinétique	15
6.4	Moment et tenseur d'inertie.....	15
6.4.1	Solide dans \mathbb{R}^2	15
6.4.2	Solide dans \mathbb{R}^3	16
6.4.3	Tenseur d'inertie	16
6.4.4	Selon un seul axe dans \mathbb{R}^3	16
6.4.5	Selon un seul axe dans \mathbb{R}^2	17
6.4.6	Selon une direction dans \mathbb{R}	17
6.4.7	Règle de Steiner	17
6.5	Eléments de volume infinitésimal	17
6.5.1	En coordonnées cartésiennes	17
6.5.2	En coordonnées polaires	17
6.5.3	En coordonnées cylindriques	18
6.5.4	En coordonnées sphériques	18
6.6	Cas généraux.....	18
6.6.1	Transfert de vitesse.....	18
6.6.2	Roulement sans glissement.....	18
6.6.3	Energie cinétique	18
7	Gyroscopes	19
7.1	Référentiel relatif et absolu	19
7.2	Angles d'Euler	20
7.2.1	Rotations des axes.....	20
7.2.2	Points du solide.....	21
7.3	Equations d'Euler.....	22
7.4	Coriolis et accélérations	22
7.4.1	L'accélération de Coriolis	22
7.4.2	Accélération centripète	22
7.4.3	Accélération absolue.....	22
7.5	Précession	22
8	Chocs, collisions et quantité de mouvement.....	23
8.1	Quantité de mouvement	23
8.1.1	Théorème de la quantité de mouvement :.....	23
8.2	Conservation de la quantité de mouvement	23
8.3	Percussion et impulsion	24
8.4	Moment de force percussional.....	24

8.5	Chocs	24
8.5.1	Choc élastique	24
8.5.2	Choc inélastique	24
8.5.3	Choc parfaitement inélastique	25
8.6	Coefficient de restitution	25
9	Lagrange	26
9.1	Equations du mouvement	26
9.1.1	Contexte et principe	26
9.1.2	Masse ponctuelle sous l'effet d'une force conservative	26
9.1.3	Coordonnées généralisées et degrés de liberté	27
9.1.4	Equation du mouvement	27
9.1.5	Coordonnées cycliques	27
9.2	Contraintes	28
9.2.1	Contraintes holonomes	28
9.2.2	Contraintes non holonomes	28
9.2.3	Contrainte scléronome	28
9.2.4	Contrainte rhéonome	28
9.3	Déplacement virtuel	29
9.3.1	Déplacement infinitésimal	29
9.4	Le principe de D'Alembert	29
9.4.1	Travail virtuel	29
9.4.2	Principe de D'Alembert	29
9.5	Forces généralisées	30
9.5.1	Forces non conservatives	30
9.5.2	Forces généralisées	30
9.5.3	Cas général du Lagrangien	30
10	Kepler et Forces centrales	31
10.1	Force centrale	31
10.1.1	Loi des aires	31
10.2	Coniques	31
10.2.1	Foyer	31
10.2.2	Types de coniques	32
10.2.3	Accélération radiale et formule de Binet	32
10.2.4	Force de gravité	33
10.3	Ellipses	33
10.3.1	Période	33
10.3.2	Conservation du moment cinétique	33
10.4	Rappel sur Coriolis et accélérations absolues	34
10.4.1	L'accélération de Coriolis	34
10.4.2	Accélération centripète	34
10.4.3	Accélération absolue	34
11	Forces de frottement	35
11.1	Frottement lors d'un déplacement	35
11.2	Frottement visqueux	35
11.2.1	A basse vitesse	35

11.2.2	A haute vitesse	35
11.3	Frottement entre deux solides.....	36
11.3.1	Frottement statique	36
11.3.2	Frottement cinétique	36
11.4	Résistance au pivotement	36
12	Statique	37
12.1	Solide en équilibre	37
12.1.1	Forces en équilibre.....	37
12.1.2	Moment de force en équilibre	37
12.2	Torseur	37
12.2.1	Définition d'un torseur	37
12.2.2	Classe d'équivalence	38
12.2.3	Equivalence de deux torseurs	38
12.2.4	Réduction	38
12.2.5	Autres torseurs en mécanique	38
12.2.6	Equilibre d'un torseur	39
12.3	L'équilibre par Lagrange	39
13	Annexe	40
13.1	Format standart	40
13.2	Systèmes de coordonnées	41
13.2.1	Le repère cartésien	41
13.2.2	Le repère cylindrique	42
13.2.3	Le repère sphérique.....	43
13.3	Formulaire.....	44
13.4	Figures supplémentaires	45

Chapitre 1

Opérations vectorielles

Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

— Notation :

— composantes vectorielle : $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$

— composantes scalaires : $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

— Addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = (u_1 + v_1)\vec{e}_1 + (u_2 + v_2)\vec{e}_2 + (u_3 + v_3)\vec{e}_3$$

— Multiplication par un scalaire : soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\alpha\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix}$$

— Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

— Produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

— Produit mixte : soit $\mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\mu = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

— Produit triple :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Chapitre 2

Lois de Newton et balistique

2.1 Lois de Newton

Le point matériel à une masse m en kg. La dynamique applique des contraintes sur la deuxième dérivée de la cinématique : \ddot{x} .

On note :

- *MRU* : mouvement rectiligne uniforme.
- *MRUA* : mouvement rectiligne uniformément accéléré.
- $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$
- F_i : une force i .
- a : l'accélération telle que $\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$.
- v : la vitesse instantanée telle que $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$.
- P, m : le point de masse m .
- référentiel galiléen : une masse ponctuelle libre (aucune force n'est appliquée) est en MRU.

1. Loi I

Persévérance du mouvement en absence de force. Il ne faut rien faire pour maintenir un MRU dans un référentiel galiléen :

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{constant}} \quad (2.1)$$

2. Loi II

La force est introduite pour caractériser la modification du mouvement :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \dot{\vec{v}} = m \vec{a} \quad (2.2)$$

3. Loi III

Action réaction : Dans une interaction mutuelle, l'action est toujours égalée à la réaction, c'est à dire,

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}^{2 \rightarrow 1} \quad (2.3)$$

2.2 Balistique

2.2.1 Sans frottements

La force est issue de la gravité est $\vec{F}_p = \vec{m}\vec{g}$ où $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

Équations horaires :

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{cste} \\ \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \\ \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{x}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{\vec{x}} = \vec{cste} \\ \dot{\vec{x}} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \\ \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{x}_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2.2 Avec frottements

— La force est issue de la gravité est $\vec{F}_p = \vec{m}\vec{g}$.

— La force de frottement visqueux est $\vec{F}_{fr} = -b\vec{v}$ où b est le coefficient de frottement visqueux.

Ainsi, nous avons les equations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} \\ \ddot{z} = -\frac{b}{m}\dot{z} - g \end{cases} \quad (2.5)$$

Qui ont comme solutions :

Selon x :

$$x(t) = x_0\left(-\frac{m}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} + x_0 + v_{x0}\frac{m}{b} \quad (2.6)$$

Selon y :

$$y(t) = y_0\left(-\frac{m}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} + y_0 + v_{y0}\frac{m}{b} \quad (2.7)$$

Selon z :

$$z(t) = -\frac{m}{b}\left(v_{z0} + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{m}{b}\left(v_{z0} + \frac{mg}{b}\right) + z_0 - \frac{mg}{b}t \quad (2.8)$$

Chapitre 3

Oscillateur Harmonique

3.1 Non-amorti et non-forcé

3.1.1 Loi de Hooke

La loi de Hooke stipule que la force exercée par le ressort est inversement proportionnelle à l'écart entre la longueur à cet instant et la longueur au repos.

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(l - l_0)\hat{x} \quad (3.1)$$

où k est la constante de rigidité du ressort [N/m] et \hat{x} est la direction de l'allongement.

Autrement dit,

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(\overrightarrow{P_1 P_2} - l_0 \widehat{P_1 P_2})\hat{x} \quad (3.2)$$

où $\widehat{P_1 P_2} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{\|P_1 P_2\|}$.

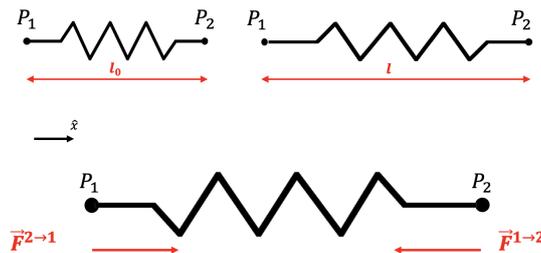


FIGURE 1 – Schéma illustrant la convention afin d'établir les forces

3.1.2 Equation différentielle et solution

$$\ddot{x} = \frac{-k}{m}x \quad (3.3)$$

où x est l'écart entre la position au repos, c'est à dire $l - l_0$.

La solution de cette équation différentielle est :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

où ω est la vitesse angulaire.

Lorsqu'on ajoute la force de pesanteur, l'équation différentielle aura la forme $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + g$. On introduit le changement de variable $u = x - \frac{m}{k}g$ pour obtenir l'équation différentielle $\ddot{u} = -\frac{k}{m}u$.

Vitesse angulaire et période :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.5)$$

3.2 Amorti et non-forcé

On ajoute l'effet d'une force de frottement \vec{F}_{fr} , qui s'oppose au sens de la vitesse, tel que :

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -b\vec{v} \quad (3.6)$$

où $\vec{v} = \dot{\vec{OP}} = \dot{x}\hat{x}$ et b est le coefficient de frottement visqueux. Autrement dit,

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -b\dot{x}\hat{x} \quad (3.7)$$

3.2.1 Equation différentielle

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \quad (3.8)$$

où x est l'écart entre la position au repos, c'est à dire $l - l_0$.

Cas	Conditions	
\mathcal{A}	$\frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{b}{2m} < \omega_0$
\mathcal{B}	$\frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{b}{2m} = \omega_0$
\mathcal{C}	$\frac{b}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{b}{2m} > \omega_0$

Remarque : attention à ne pas confondre ω_0 avec ω . La pulsation ω_0 est issue de $\sqrt{\frac{k}{m}}$ alors que ω est issue de la caractéristique forcée de l'oscillateur vue au chapitre 1.3.3, $A \sin(\omega t)$!

Solution des différents cas

\mathcal{A} : La pulsation initiale de l'oscillateur est supérieure à $\frac{b}{2m}$. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left[C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} t \right) \right] \quad (3.9)$$

\mathcal{B} : La pulsation initiale de l'oscillateur est égale à $\frac{b}{2m}$. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} + C_2 \cdot te^{-\frac{b}{2m}t} \quad (3.10)$$

\mathcal{C} : La pulsation initiale de l'oscillateur est inférieure à $\frac{b}{2m}$. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle est :

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{-\frac{b^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}\right)t} \quad (3.11)$$

3.3 Amorti et forcé

On ajoute une force extérieure qui impose un mouvement. Ce mouvement est traduit dans l'équation différentielle par un second membre $A \sin(\omega t)$. Ainsi, l'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} - A \sin(\omega t) \\ \Leftrightarrow x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

où $x_h(t)$ est la solution homogène qui est identique à celle des cas non-forcés et $x_p(t)$ est la solution particulière qu'il faut encore calculer.

On pose :

$$x_p(t) = \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t) \text{ avec } \alpha_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha_1 \in \mathbb{C} \quad (3.13)$$

où

$$\alpha_0 = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{-\frac{b}{m}A\omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \quad (3.14)$$

Ainsi

$$x_p(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.15)$$

où $A_m = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}$

Remarque : x_p représente le mouvement vers lequel le système tend asymptotiquement, une fois que le transitoire dû aux conditions initiales a disparu.

3.3.1 Solution complète

On a que $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ et on se trouve dans le cas \mathcal{A} , c'est à dire que $\frac{b}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{b}{2m}t} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right) \right] \\ &+ \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{-\frac{b}{m}A\omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Remarque : lorsque t est grand, la seule partie restante est celle sans conditions initiales, autrement dit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \simeq x_p(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.17)$$

L'amplitude maximale A_m est donnée par

$$A_m = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} = A \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2}}$$

$$A_m = A \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + \left(\frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\right) \omega^2 + \frac{k^2}{m^2}}} \quad (3.18)$$

3.4 Pendule simple

Forces :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \cos(\theta) \\ -T \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \vec{mg} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

On applique $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{OP}}$ avec

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \\ R \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$\dot{\vec{OP}} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin(\theta) \\ R\dot{\theta} \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\ddot{\vec{OP}} = \begin{pmatrix} -R\ddot{\theta} \sin(\theta) - R\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \\ R\ddot{\theta} \cos(\theta) - R\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Voir figure 12

On a donc, selon x

$$m[-R\ddot{\theta} \sin(\theta) - R\dot{\theta}^2 \cos(\theta)] = mg - T \cos(\theta) \quad (3.23)$$

et selon y

$$m[R\ddot{\theta} \cos(\theta) - R\dot{\theta}^2 \sin(\theta)] = -T \sin(\theta) \quad (3.24)$$

En substituant et en isolant T , on a que

$$T = \frac{m[R\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - R\ddot{\theta} \cos(\theta)]}{\sin(\theta)} \quad (3.25)$$

ce qui nous ramène à l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin(\theta) \quad (3.26)$$

En cas de petits angles, on peut utiliser l'approximation $\sin(h) \approx h$, et on a :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \theta \quad (3.27)$$

Chapitre 4

Énergie

Notations :

- W : travail, en Joules J.
- AB : segment rectiligne.
- V : énergie potentielle, aussi notée E_{pot} .
- T : énergie cinétique, aussi notée E_{cin} .
- E_{mec} : énergie mécanique.
- P : puissance, en Watts W.

4.1 Travail

Le travail est un scalaire, ce n'est donc pas un vecteur.

4.1.1 Segment

Travail d'une force constante sur un segment rectiligne AB :

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (4.1)$$

Remarque : si l'angle entre la force et le segment vaut $\frac{\pi}{2}$, alors $W = 0$.

4.1.2 Segments multiples

Plusieurs segments, force constante par morceaux :

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \quad (4.2)$$

4.1.3 Segments infinitésimaux

On prend des segments infinitésimaux sur une courbe régulière. La force est variable mais constante en tout temps :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.3)$$

4.2 Puissance instantanée

On peut aussi définir le travail comme le produit de la puissance instantanée et la durée pendant laquelle elle est exercée.

$$P = \frac{dW}{dt} \Leftrightarrow dW = P dt \quad (4.4)$$

De l'équation 4.4, on peut en tirer :

$$W = \int_O^B \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \Leftrightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (4.5)$$

4.3 Potentiel

Lorsque le travail ne dépend pas du chemin emprunté pour déplacer un système d'un point A vers un point B , il est possible d'introduire une fonction scalaire génératrice de la force.

Soit Γ_1 et Γ_2 , deux courbes (chemins) différentes qui mènent d'un point A vers un point B , alors on a que :

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} d\vec{r} \quad \forall \Gamma_1, \Gamma_2 \quad (4.6)$$

Définition du potentiel : \forall cycle c tel que $\oint_c \vec{F} d\vec{r} = 0$, alors

$$V = - \int_O^P \vec{F} d\vec{r} \quad (4.7)$$

Exemples :

- La force de gravité $\vec{m}\vec{g}$ donne $V = mgh$.
- La force d'un ressort \vec{F}_r donne $V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$.

4.4 Energie cinétique

Définition de l'énergie cinétique lorsque les vecteurs de la base ne subissent aucun changement :

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{O}P} \cdot \dot{\vec{O}P}) \quad (4.8)$$

où $\vec{O}P = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ et $\dot{\vec{O}P} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$. Ainsi on peut aussi définir T par

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.9)$$

4.5 Energie mécanique

4.5.1 Théorème

Dans un système où toutes les forces sont conservatives, l'énergie mécanique

$$E = V + T \quad (4.10)$$

est conservée, c'est à dire $\dot{E} = 0$.

Chapitre 5

Rotations

Remarques : On note $\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}}$ la matrice de rotation d'angle θ selon l'axe \hat{n} lorsque le point bouge et le repère reste fixe. On note $\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}}^{-1}$ la matrice de rotation d'angle θ selon l'axe \hat{n} lorsque le repère bouge et le point reste fixe.

5.1 Matrices de rotation dans \mathbb{R}^2

5.1.1 Rotation du point, le repère reste fixe

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(O, \hat{x}, \hat{y})} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

On a en effet la matrice de rotation :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

5.1.2 Rotation du repère, le point reste fixe

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(O, \hat{x}', \hat{y}')} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(O, \hat{x}, \hat{y})} \quad (5.3)$$

On a en effet la matrice de rotation :

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

5.2 Matrices de rotation dans \mathbb{R}^3

5.2.1 Rotation du point, le repère reste fixe

On fait la rotation selon l'axe \hat{z} .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On a en effet la matrice de rotation d'axe \hat{z} :

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{z}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

5.2.2 Rotation du repère, le point reste fixe

On fait une rotation d'axe \hat{n} et d'angle θ :

$\hat{n} = \hat{x}$:

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$\hat{n} = \hat{y}$:

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$\hat{n} = \hat{z}$:

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{z}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

5.2.3 Généralisation pour les rotations

Lorsqu'on veut faire une rotation d'angle θ autour de l'axe \hat{n} , où le repère reste fixe, on a la matrice de rotation $\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}}$:

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}} = \cos(\theta)\mathbf{I} + (1 - \cos(\theta))\hat{n}\hat{n}^T + \sin(\theta)[\hat{n}\wedge] \quad (5.10)$$

Si le repère bouge et le point reste fixe, $\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}}^{-1}$ devient :

$$\mathbf{R}_{\theta, \hat{n}}^{-1} = \cos(\theta)\mathbf{I} + (1 - \cos(\theta))\hat{n}\hat{n}^T - \sin(\theta)[\hat{n}\wedge] \quad (5.11)$$

où

$$\begin{aligned} [\hat{n}\wedge] &= \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ quand } \hat{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ \hat{n}\hat{n}^T &= \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_1n_2 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_1n_3 & n_2n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3 Formule de Poisson

Soit \overrightarrow{OP} un vecteur qui tourne de manière infinitésimale, il effectue une rotation d'axe \hat{n} et d'angle θ durant dt , alors

$$\dot{\overrightarrow{OP}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{n} \quad (5.13)$$

5.4 Coordonées cylindriques et sphériques

Remarque : Voir les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3 de la partie 2 (résolution de problème) pour un résumé sur les systèmes de coordonnées.

5.4.1 Repère cylindrique

1. Centré en P
2. Base canonique : $(P, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$
3. $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$
4. $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\varphi\| = \|\vec{e}_z\| = 1$

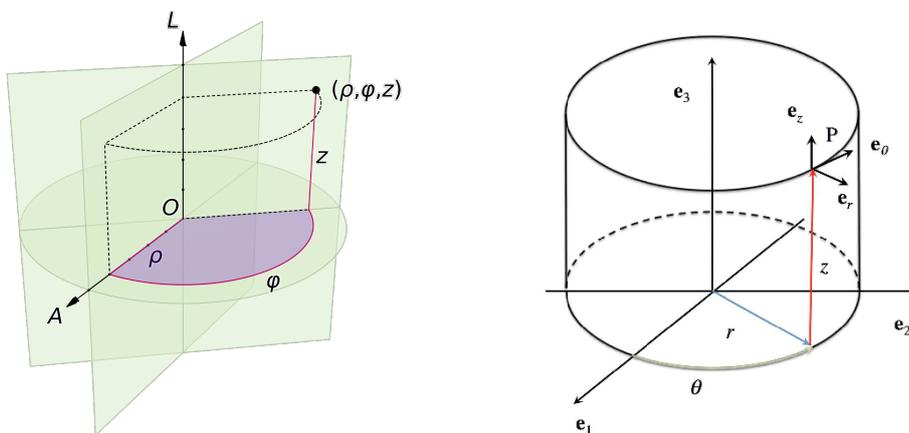


FIGURE 2 – Exemples de repères à coordonnées cylindriques

Le repère effectue une rotation infinitésimale pendant dt . Il est animé d'un vecteur instantané de rotation : $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{z}$.

Ramenons nous aux équations de Newton :

$$\overrightarrow{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \quad (5.14)$$

$$\dot{\overrightarrow{OP}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z$$

par Poisson, on a

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

et

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho$$

Ainsi

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\rho\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \quad (5.15)$$

Et de manière similaire on montre que

$$\ddot{\vec{OP}} = (\ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2\rho)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (5.16)$$

5.4.2 Repère sphérique

1. Centré en P
2. Base canonique : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$
3. $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$
4. $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\varphi\| = \|\vec{e}_z\| = 1$

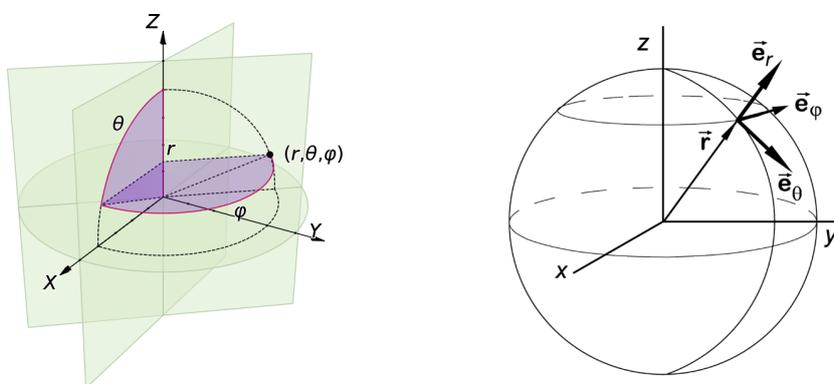


FIGURE 3 – Exemples de repères à coordonnées sphériques

Pour trouver l'accélération absolue (dans le référentiel Galiléen), exprimée dans le repère sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= r\vec{e}_r \\ \dot{\vec{OP}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \\ \text{avec } \dot{\vec{e}}_r &= \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \text{ Ainsi :} \\ \dot{\vec{OP}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \ddot{\vec{OP}} &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)]\vec{e}_r \\ &\quad + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos(\theta)\sin(\theta)]\vec{e}_\theta \\ &\quad + [r\ddot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta)]\vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (5.17)$$

Lorsque $\vec{\omega}$ est la composition de deux rotations d'axes concourants¹, alors $\vec{\omega}$ est la somme des deux rotations instantanées :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\vec{e}_z \quad (5.18)$$

avec $\vec{e}_z = \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$, on a

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin(\theta)\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\cos(\theta)\vec{e}_r \Leftrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin(\theta) \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos(\theta) \end{pmatrix}_{(P, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)} \quad (5.19)$$

1. qui tendent vers un même point.

Chapitre 6

Corps solides et inertie

6.1 Moment cinétique

On nomme la quantité de mouvement de rotation le moment cinétique. En un point O fixe, un objet possède un moment cinétique donné par

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP_{\alpha}} \wedge (m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \quad (6.1)$$

Au centre de masse, on a

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} \overrightarrow{GP_{\alpha}} \wedge (m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \quad (6.2)$$

Le moment cinétique en un point A quelconque, d'un point P de masse m_P , ayant une vitesse \vec{v}_P est

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \wedge (m_P \vec{v}_P) \quad (6.3)$$

6.1.1 O fixe dans un référentiel Galiléen

Le moment cinétique est défini par :

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega} \quad (6.4)$$

où \mathbf{I}_O est une matrice 3×3 .

La vitesse d'un point P_{α} soumis uniquement à une rotation $\vec{\omega}$ (pas de translation) est donnée par :

$$\vec{v}_{P_{\alpha}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP_{\alpha}} \quad (6.5)$$

6.1.2 Au centre de masse G

$$\vec{L}_G = \mathbf{I}_G \vec{\omega} \quad (6.6)$$

où \mathbf{I}_G est une matrice 3×3 .

La vitesse d'un point P_{α} du solide soumis à une rotation $\vec{\omega}$ et la translation du centre de masse \vec{v}_G est donnée par :

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GP_{\alpha}} \quad (6.7)$$

6.2 Moment de force

On se fixe à un point O sans vitesse. Toutes les forces \vec{F}_α appliquées à un point P_α tendent à accélérer le solide autour du point O . Le moment de force résultant est

$$\vec{M}_O = \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha \quad (6.8)$$

Au centre de masse, on a

$$\vec{M}_G = \sum_{\alpha} \vec{GP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha \quad (6.9)$$

Le moment de force en un point A quelconque, engendré par une force \vec{F} appliquée en un point P est

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \vec{F} \quad (6.10)$$

6.3 Théorème du moment cinétique

Le moment de force peut aussi être défini par

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad (6.11)$$

Cela implique que l'application d'un moment de force \vec{M}_O engendre une variation de moment cinétique \vec{L}_O . Si le moment de force a la même direction que le moment cinétique, seule la vitesse de rotation va varier, sinon le moment cinétique va s'orienter dans la direction du moment de force.

De plus, on sait que

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathbf{I}_O \dot{\vec{\omega}} \quad (6.12)$$

Ainsi, on a que

$$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \dot{\vec{\omega}} \quad (6.13)$$

6.4 Moment et tenseur d'inertie

6.4.1 Solide dans \mathbb{R}^2

Si O est un point fixe du solide et les points P_α , également sur le solide, subissent une rotation à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de O , alors

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha \quad (6.14)$$

Le moment cinétique lié au point O est

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum \vec{OP}_\alpha \wedge (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \\ &= \sum \vec{OP}_\alpha \wedge [m_\alpha (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha)] \\ &= \sum m_\alpha [(\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\alpha) \vec{\omega} - \underbrace{(\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \vec{OP}_\alpha}_{=0 \text{ car } \vec{OP}_\alpha \perp \vec{\omega}}] \\ \Leftrightarrow \vec{L}_O &= \sum_{\alpha} m_\alpha \|\vec{OP}_\alpha\|^2 \vec{\omega} \end{aligned}$$

6.4.2 Solide dans \mathbb{R}^3

En 3D on ne peut plus garantir que $\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega} = 0$. Donc le moment cinétique devient

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= - \sum m_\alpha (\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{OP}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \|\overrightarrow{OP}_\alpha\|^2 \vec{\omega} \\ &= - \sum m_\alpha (\overrightarrow{OP}_\alpha^T \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{OP}_\alpha + \left(\sum_\alpha m_\alpha \|\overrightarrow{OP}_\alpha\|^2 \right) \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}, \text{ où } \mathbf{I} \text{ est l'id. } 3 \times 3 \\ &= - \sum m_\alpha \overrightarrow{OP}_\alpha (\overrightarrow{OP}_\alpha^T \cdot \vec{\omega}) + \sum_\alpha m_\alpha \|\overrightarrow{OP}_\alpha\|^2 \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \\ &= \sum m_\alpha [-(\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \overrightarrow{OP}_\alpha^T) + \|\overrightarrow{OP}_\alpha\|^2 \mathbf{I}] \cdot \vec{\omega} \\ &\Leftrightarrow \vec{L}_O = \mathbf{I}_O \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

où $\mathbf{I}_O \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$. Donc $\mathbf{I}_O = \sum m_\alpha (-\overrightarrow{OP}_\alpha \cdot \overrightarrow{OP}_\alpha^T + \|\overrightarrow{OP}_\alpha\|^2 \mathbf{I})$.

Ensuite, on pose que $\overrightarrow{OP}_\alpha = x_\alpha \hat{x} + y_\alpha \hat{y} + z_\alpha \hat{z}$, on passe du discret au continu, et on obtient le tenseur d'inertie au centre de masse G .

6.4.3 Tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie est la matrice rassemblant tous les moments d'inertie selon tous les axes :

$$\mathbf{I}_O = \begin{pmatrix} \iiint (y^2 + z^2) dm & - \iiint xy dm & - \iiint xz dm \\ - \iiint xy dm & \iiint (x^2 + z^2) dm & - \iiint yz dm \\ - \iiint xz dm & - \iiint yz dm & \iiint (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

On peut ramener cette matrice à une matrice symétrique sous la forme

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

on a aussi que le corps est

- une toupie asymétrique si $I_1 \neq I_2 \neq I_3$,
- une toupie symétrique si $I_1 = I_2 \neq I_3$ (par exemple cône, cylindre),
- une toupie sphérique si $I_1 = I_2 = I_3$ (par exemple sphère).

6.4.4 Selon un seul axe dans \mathbb{R}^3

Pour simplifier, dans les cas qui le permettent, on peut calculer l'inertie selon un axe. Prenons l'axe z par exemple :

$$\mathbf{I}_z = \iiint (x^2 + y^2) dm = \iiint (x^2 + y^2) \mu dV \quad (6.17)$$

où

- dm est un élément de masse infinitésimal,
- μ est la densité volumique telle que $\rho = \frac{M}{V}$,
- dV est un élément de volume infinitésimal.

6.4.5 Selon un seul axe dans \mathbb{R}^2

En $2D$, si on prends l'axe x , on a

$$\mathbf{I}_x = \iint (y^2) dm = \iint (y^2) \mu dS \quad (6.18)$$

où

- dm est un élément de masse infinitésimal,
- μ est la densité surfacique telle que $\rho = \frac{M}{S}$,
- dS est un élément de surface infinitésimal.

6.4.6 Selon une direction dans \mathbb{R}

En $1D$ il n'y a qu'un seul moment d'inertie

$$\mathbf{I} = \int (x^2) dm = \int (x^2) \mu dx \quad (6.19)$$

où

- dm est un élément de masse infinitésimal,
- μ est la densité linéique telle que $\rho = \frac{M}{L}$,
- dx est un élément de longueur infinitésimal.

6.4.7 Règle de Steiner

Soit G le centre de masse d'un corps de masse m tournant autour d'un axe z , alors le moment d'inertie du même corps selon un axe z' , tel que $z' \parallel z$ est

$$I_{z'} = I_{G,z} + md^2 \quad (6.20)$$

où d est la distance entre z et z' . En appliquant cette règle dans l'espace, on a

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_G + M \begin{pmatrix} \gamma_y^2 + \gamma_z^2 & -\gamma_x\gamma_y & -\gamma_x\gamma_z \\ -\gamma_x\gamma_y & \gamma_x^2 + \gamma_z^2 & -\gamma_y\gamma_z \\ -\gamma_x\gamma_z & -\gamma_y\gamma_z & \gamma_x^2 + \gamma_y^2 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

en prenant $\vec{AG} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}$

6.5 Eléments de volume infinitésimal

6.5.1 En coordonnées cartésiennes

$$dV = dx dy dz \quad (6.22)$$

6.5.2 En coordonnées polaires

La coordonnée polaire est identique à la coordonnée cylindrique quand $z = 0$.

$$dA = r dr d\theta \quad (6.23)$$

6.5.3 En coordonnées cylindriques

$$dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \quad (6.24)$$

6.5.4 En coordonnées sphériques

$$dV = r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \quad (6.25)$$

6.6 Cas généraux

6.6.1 Transfert de vitesse

Si \vec{v}_A est la vitesse connue en un point A du corps subissant une rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega}$, alors la vitesse en un point P quelconque du corps est donnée par

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad (6.26)$$

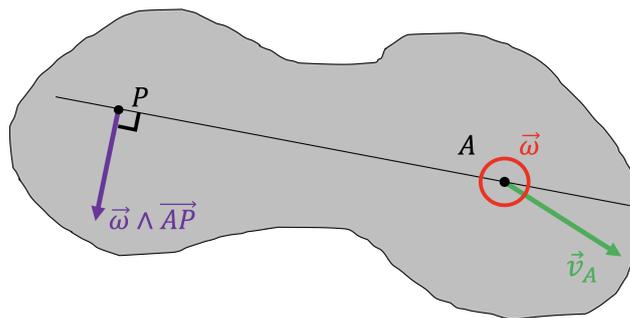


FIGURE 4 – Illustration du transfert de vitesse

6.6.2 Roulement sans glissement

La condition pour un roulement sans glissement en un point P est donnée par

$$\vec{v}_P = \vec{0} \quad (6.27)$$

6.6.3 Energie cinétique

Au centre de masse G

On calcule l'énergie cinétique en fonction du tenseur \mathbf{I}_G :

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_G \vec{\omega} \quad (6.28)$$

En un point A quelconque

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_A \vec{\omega} \quad (6.29)$$

où G est le centre de masse.

Chapitre 7

Gyroscopes

Rappel et remarque : Un vecteur subissant des rotations successives données par les matrices \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 respectivement, est multiplié par la matrice $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$. L'ordre compte car $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$. Une matrice de rotation d'angle φ et d'axe \hat{n} , lorsque le repère reste fixe et le point bouge est nommée $\mathbf{R}_{\varphi,\hat{n}}$. Lorsque c'est le repère qui bouge et le point qui reste fixe, la matrice est nommée $\mathbf{R}_{\varphi,\hat{n}}^{-1}$.

7.1 Référentiel relatif et absolu

On note P un point quelconque du solide, et O' un point connu tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$. On attache un nouveau repère $(O', \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)$ au solide.

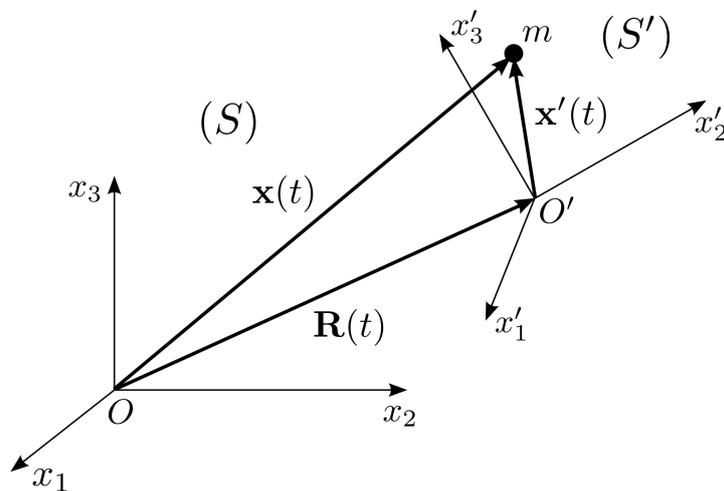


FIGURE 5 – L'origine O' du nouveau repère correspond à un point A quelconque du solide

La vitesse relative du point P est notée $\vec{v}_r(P)$ et vaut

$$\vec{v}_r(P) = \dot{\overrightarrow{O'P}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \hat{x}'_i \quad (7.1)$$

La vitesse absolue du point P est notée $\vec{v}_a(P)$ et vaut

$$\vec{v}_a(P) = \dot{\overrightarrow{OP}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{x}_i = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \dot{\overrightarrow{O'P}}$$

où $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_a(O')$ et $\overrightarrow{O'P} = \frac{d}{dt}(x'_1\hat{x}'_1 + x'_2\hat{x}'_2 + x'_3\hat{x}'_3)$.

Par Leibniz, on a que

$$\frac{d}{dt}(x'_1\hat{x}'_1 + x'_2\hat{x}'_2 + x'_3\hat{x}'_3) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i\hat{x}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i\dot{\hat{x}}'_i$$

Et finalement, par Poisson, on obtient :

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_a(O') + \vec{v}_r(P) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \quad (7.2)$$

Pour l'accélération absolue, on a

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(O') + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) \quad (7.3)$$

7.2 Angles d'Euler

7.2.1 Rotations des axes

On effectue trois rotations des axes canoniques en répétant l'axe de départ. Le repère est lié au solide, il n'y a pas de mouvement relatif. Si notre repère de départ est $(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, on a \hat{x}_i avant la rotation et on nomme \hat{x}'_i l'axe après la première rotation, \hat{x}''_i après la deuxième rotation et \hat{x}'''_i après la troisième rotation.

On peut avoir une rotation :

- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ qui correspond à $\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}'_1 \rightarrow \hat{x}''_3$ (que l'on utilise par convention),
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ qui correspond à $\hat{x}_1 \rightarrow \hat{x}'_2 \rightarrow \hat{x}''_1$,
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ qui correspond à $\hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}'_3 \rightarrow \hat{x}''_2$.

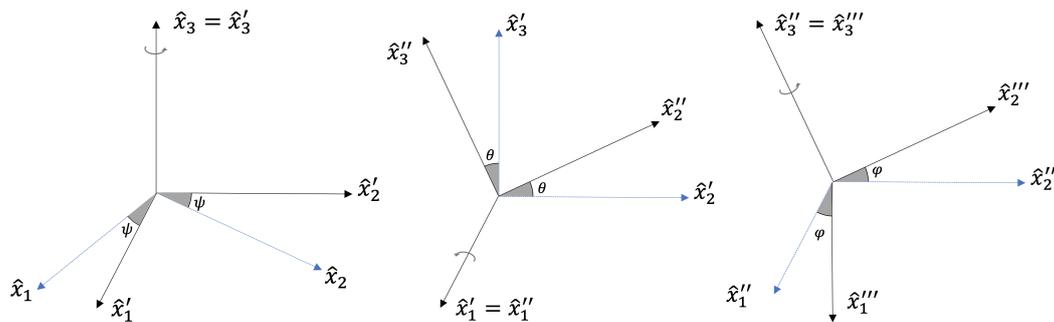


FIGURE 6 – Rotation $\hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}'_1 \rightarrow \hat{x}''_3$

Lorsqu'un corps effectue les trois rotations successives (figure 7), on a que :

La première rotation La première rotation, nommée *précession*, est selon \hat{x}_3 et d'angle ψ . On a les propriétés suivantes :

- $\hat{x}'_3 = \hat{x}_3$
- $\hat{x}'_1 = \mathbf{R}_{\psi, \hat{x}_3}^{-1} \hat{x}_1$
- $\hat{x}'_2 = \mathbf{R}_{\psi, \hat{x}_3}^{-1} \hat{x}_2$

On a donc le nouveau repère $(G, \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)$.

La deuxième rotation La deuxième rotation, nommée *nutation*, est selon \hat{x}'_1 et d'angle θ . On a les propriétés suivantes :

- $\hat{x}''_1 = \hat{x}'_1$
- $\hat{x}''_2 = \mathbf{R}_{\theta, \hat{x}'_1}^{-1} \hat{x}'_2$
- $\hat{x}''_3 = \mathbf{R}_{\theta, \hat{x}'_1}^{-1} \hat{x}'_3$

On a donc le nouveau repère $(G, \hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3)$.

La troisième rotation La troisième rotation, nommée *rotation propre ou giration*, est selon \hat{x}''_3 et d'angle φ . On a les propriétés suivantes :

- $\hat{x}'''_3 = \hat{x}''_3$
- $\hat{x}'''_1 = \mathbf{R}_{\varphi, \hat{x}''_3}^{-1} \hat{x}''_1$
- $\hat{x}'''_2 = \mathbf{R}_{\varphi, \hat{x}''_3}^{-1} \hat{x}''_2$

On a donc le nouveau repère $(G, \hat{x}'''_1, \hat{x}'''_2, \hat{x}'''_3)$.

7.2.2 Points du solide

Soit $\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ le vecteur reliant le centre de masse G et un point quelconque P avant les rotations. On a que $\overrightarrow{GP} = x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3$.

1. Après la première rotation,

$$\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)} = \mathbf{R}_{\psi, \hat{x}'_3}^{-1} \overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)} \quad (7.4)$$

ce qui nous donne $\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)} = x'_1 \hat{x}'_1 + x'_2 \hat{x}'_2 + x'_3 \hat{x}'_3$.

2. Après la deuxième rotation,

$$\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3)} = \mathbf{R}_{\theta, \hat{x}'_1}^{-1} \overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)} \quad (7.5)$$

ce qui nous donne $\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3)} = x''_1 \hat{x}''_1 + x''_2 \hat{x}''_2 + x''_3 \hat{x}''_3$.

3. Après la troisième rotation,

$$\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}'''_1, \hat{x}'''_2, \hat{x}'''_3)} = \mathbf{R}_{\varphi, \hat{x}''_3}^{-1} \overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3)} \quad (7.6)$$

ce qui nous donne $\overrightarrow{GP}_{(G, \hat{x}'''_1, \hat{x}'''_2, \hat{x}'''_3)} = x'''_1 \hat{x}'''_1 + x'''_2 \hat{x}'''_2 + x'''_3 \hat{x}'''_3$.

La vitesse de rotation instantanée est

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{x}'_1 + \dot{\varphi} \hat{x}''_3 \quad (7.7)$$

En appliquant les rotations successives et les matrices de rotation, on obtient $\vec{\Omega}$ dans le repère final, autrement dit, $\vec{\Omega}_{(G, \hat{x}'''_1, \hat{x}'''_2, \hat{x}'''_3)}$, et il vaut

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

7.3 Equations d'Euler

Il s'agit des équations différentielles qui permettent de calculer les angles d'Euler. On a trois équations différentielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 \dot{\Omega}_1 &= (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) \Omega_2 \Omega_3 + M_{G1}^{\text{ext}} \\ \mathbf{I}_2 \dot{\Omega}_2 &= (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) \Omega_1 \Omega_3 + M_{G2}^{\text{ext}} \\ \mathbf{I}_3 \dot{\Omega}_3 &= (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) \Omega_1 \Omega_2 + M_{G3}^{\text{ext}} \end{aligned}$$

On rappelle que le tenseur d'inertie diagonal au centre de masse G est

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

7.4 Coriolis et accélérations

7.4.1 L'accélération de Coriolis

Soient $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire instantanée du référentiel en mouvement et \vec{v}_r la vitesse relative d'un objet par rapport au référentiel en mouvement, alors l'accélération de Coriolis est telle que

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad (7.9)$$

7.4.2 Accélération centripète

Il s'agit de l'accélération nécessaire pour qu'un objet ayant une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ maintienne une trajectoire circulaire de rayon \vec{r} . Elle est telle que

$$\vec{a}_{cent} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (7.10)$$

7.4.3 Accélération absolue

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{cent} + \vec{a}_r \quad (7.11)$$

où \vec{a}_r est l'accélération relative au référentiel en mouvement et vaut $\vec{a}_r = \dot{\vec{v}}_r$.

7.5 Précession

La précession est le nom donné à un changement graduel d'orientation de l'axe de rotation. Elle peut avoir lieu lorsqu'un moment est appliqué. Prenons un objet qui tourne à vitesse angulaire ω constante. Cet objet a un moment cinétique L_O . Lorsqu'un moment de force est appliqué dans une direction différente de celle du moment cinétique, ce dernier va prendre la direction du moment de force appliqué. Cela est dû au fait que le moment de force engendre une variation de moment cinétique $\Delta \vec{L}_O$. Le moment cinétique va donc changer de direction lorsque le moment de force est appliqué dans une autre direction. Voir *fig. 13 p.46*.

Chapitre 8

Chocs, collisions et quantité de mouvement

Notations :

- \vec{p} : la quantité de mouvement.
- $\vec{\Pi}$: la percussion.
- \vec{p}' est la quantité de mouvement après un choc.

8.1 Quantité de mouvement

On rappelle que les forces internes \vec{F}^{int} se compensent et que les forces externes \vec{F}^{ext} agissent sur la trajectoire de l'objet.

8.1.1 Théorème de la quantité de mouvement :

Soient \vec{p} la quantité de mouvement et \vec{F}^{ext} la résultante des force externes. On a que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad (8.1)$$

où \vec{p} est tel que

$$\vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (8.2)$$

8.2 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement totale du système ne change pas lors d'un choc :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = \vec{0} \quad (8.3)$$

En utilisant la relation $\vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$, on pour la collision d'un objet A et B :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_A = \vec{p}_B' + \vec{p}_2' \Leftrightarrow m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$$

Sur un système isolé, où la quantité de mouvement ne serait pas conservée, on applique le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad (8.4)$$

Si la quantité de mouvement n'est pas conservée, on a une force extérieure qui agit sur l'objet.

8.3 Percussion et impulsion

La percussion, ou impulsion, d'une force vient du cas où la quantité de mouvement n'est pas conservée et que sa variation est instantanée. Une force externe \vec{F}^{ext} crée une impulsion $\vec{\Pi}$ lorsqu'elle est grande et qu'elle agit pendant un Δt petit. Cette percussion vaut

$$\vec{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (8.5)$$

De la même manière, on a que

$$\Delta \vec{p} = \vec{\Pi} \quad (8.6)$$

8.4 Moment de force percussif

Par un raisonnement similaire que pour la percussion $\vec{\Pi}$, on peut trouver que la variation de moment cinétique vaut

$$\Delta \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \overrightarrow{OP}_{\alpha} \wedge \vec{\Pi}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

où $\vec{L}_O' - \vec{L}_O = \Delta \vec{L}_O$
car on sait que $d\vec{L}_O = \vec{M}_O dt$

8.5 Chocs

car: $\int_0^t M(\vec{v}_B \wedge \vec{v}_A) dt = 0$

8.5.1 Choc élastique

Le choc entre deux corps ne fait pas varier l'énergie cinétique. On a forcément que les objets partent dans des directions différentes.

$$T = T' \rightarrow T' \text{ direction différent}$$

$$\vec{p} = \vec{p}'$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G'$$

Par exemple le pendule de Newton, boule de billard, ...

8.5.2 Choc inélastique

L'énergie cinétique n'est pas la même avant et après le choc.

$$T \geq T'$$

$$p = p'$$

Par exemple une balle de basket, une masse qui percute une autre sur un mouvement rectiligne, ...

8.5.3 Choc parfaitement inélastique

Aussi nommé choc mou, les deux corps sont liés après le choc et ils se déplacent à la même vitesse.

Par exemple une masse m à vitesse v qui percute une autre masse m au repos. Après le choc, si les deux sont liées, elle ont une vitesse $\frac{v}{2}$.

8.6 Coefficient de restitution

Le coefficient de restitution, noté e , est défini comme le quotient de la vitesse relative entre deux corps avant le choc et celle après le choc.

$$v'_r = ev_r$$

où $v_r = v_B - v_A$ et $v'_r = v'_B - v'_A$ pour deux corps A et B . On a que $e \in]0; 1]$.

Chapitre 9

Lagrange

Notations :

- \mathcal{L} : le Lagrangien.
- q_i : la coordonnée généralisée.
- δq_i : le déplacement infinitésimal de la coordonnée généralisée q_i .

9.1 Equations du mouvement

9.1.1 Contexte et principe

Le but de la mécanique Lagrangienne est d'utiliser les lois de conservations afin de déduire les équations différentielles du mouvement. On utilise la conservation des forces issues de potentiels, autrement dit la conservation de l'énergie du système et aussi la conservation dans le cas de symétrie, comme par exemple la conservation du moment cinétique dans le cadre des rotations et la conservation de la quantité de mouvement pour les translations. On va chercher une fonction scalaire qui nous donne les équations du mouvement.

9.1.2 Masse ponctuelle sous l'effet d'une force conservative

On pose un point P de masse m dans le repère cartésien $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. On a que $\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. On peut aussi dire qu'un potentiel V existe et varie en fonction de x , y et z . On le note alors $V(x, y, z)$. On a alors que la force F_p issue de ce potentiel aura un effet sur l'accélération du point P . Par la deuxième loi de Newton,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_{p,x} \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dz} \right) \\ m\ddot{y} &= -F_{p,y} \Leftrightarrow m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= -F_{p,z} \Leftrightarrow m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= m \ddot{x}} = \frac{dT}{dz}$

On fait apparaître l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$. Etant donné que l'énergie mécanique est conservée, autrement dit $E = T + V = cst.$, on a que

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m\dot{x})}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m\dot{y})}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m\dot{z})}_{\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Soit: } \quad & \frac{d\dot{x}}{dt} m + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ & = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit: } \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

On peut donc établir le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n) \quad (9.1)$$

Et en tirer que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

9.1.3 Coordonnées généralisées et degrés de liberté

On note q_1, \dots, q_n les n coordonnées généralisées. Ces coordonnées doivent être libres, ce qui veut dire que le système en dépend, et elle ne dépendent pas l'une de l'autre. En enlevant les coordonnées liées (non-libres) on a n coordonnées généralisées et le système a n degrés de liberté.

Exemple : prenons une voiture qui avance sur une route, ses roues roulent sans glisser. Si x représente la position de la voiture et φ l'angle qu'a tourné une roue, il n'y a qu'un degré de liberté car si la roue tourne, la voiture avance, la réciproque est aussi vraie. Ces deux coordonnées sont donc liées, il faut en choisir une et l'autre en dépendra.

9.1.4 Equation du mouvement

Le Lagrangien en fonction des coordonnées généralisées est

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (9.2)$$

9.1.5 Coordonnées cycliques

Une coordonnée généralisée q_i est dite cyclique si elle n'apparaît pas dans le Lagrangien de manière explicite. On aura que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Ce qui implique que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = C_1 = \text{cst.}$$

On pourra isoler \dot{q}_i qui sera en fonction de C_1 .

9.2 Contraintes

9.2.1 Contraintes holonomes

Les contraintes holonomes, ou parfaites, sont des contraintes entre les coordonnées. Les forces qui les maintiennent n'effectuent aucun travail lors d'un déplacement compatible avec la contrainte. On appelle

$$f_i(q_1, \dots, q_N, t) = 0, i = 1, \dots, k$$

la fonction qui exprime la contrainte. Lorsqu'on a les points $P_i, i = 1, \dots, N$, on a k contraintes indépendantes liant les points. On a donc q_1, \dots, q_n qui sont les coordonnées généralisées libres, où $n = N - k$.

La distance entre deux points A et B d'un corps solide, de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) , peut s'écrire $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = AB^2$, qui est une contrainte holonome de la forme $f(x, y, z) = 0$.

Exemple : Dans le cas du pendule simple, la contrainte qui lie la coordonnée x et y est l'équation du cercle $x^2 + y^2 = \ell^2$, où la longueur du fil l est le rayon. On a donc la contrainte $f(x, y, t) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$. Les deux coordonnées x et y dépendent l'une de l'autre, grâce à la contrainte. On pourrait utiliser la coordonnée θ de l'angle du pendule, qui lie x et y et facilite les calculs.

9.2.2 Contraintes non holonomes

On a deux catégories de contraintes non holonomes :

Les contraintes bilatérales : Ce sont des contraintes qui font intervenir une égalité. Les contraintes holonomes peuvent être bilatérales.

Les contraintes unilatérales : Ce sont des contraintes qui font intervenir une inégalité. Un fil souple et inextensible impose une contrainte unilatérale car $x^2 + y^2 \leq \ell^2$.

9.2.3 Contrainte scléronome

Une contrainte est dite *scléronome* lorsqu'elle ne fait pas intervenir explicitement le temps. Elle est telle que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

9.2.4 Contrainte rhéonome

Si une contrainte n'est pas scléronome, elle est dite *rhéonome*. Le temps apparaît explicitement dans la contrainte. Un corps tournant à une vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe impose la contrainte $\theta = \Omega t$.

9.3 Déplacement virtuel

On prend le déplacement infinitésimal des coordonnées q_1, \dots, q_n . Ce déplacement infinitésimal est noté $\delta q_1, \dots, \delta q_n$.

9.3.1 Déplacement infinitésimal

Un déplacement infinitésimal est tel que l'équation

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \delta q_n = 0, i = 1, \dots, k \quad (9.3)$$

est satisfaite. Le temps est figé, donc la dérivée par rapport au temps est nulle :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \delta t = 0, i = 1, \dots, k$$

Exemple : reprenons l'exemple du pendule simple. La contrainte parfaite $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - \ell^2$ aura comme déplacement virtuel $2x\delta x + 2y\delta y = 0 \Leftrightarrow x\delta x + y\delta y = 0$.

9.4 Le principe de D'Alembert

9.4.1 Travail virtuel

On appelle travail virtuel le travail infinitésimal qu'effectue une force \vec{F} quelconque lors d'un déplacement virtuel. Il est tel que

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (9.4)$$

L'application du principe des travaux virtuels requiert l'utilisation de contraintes parfaite ou bilatérales.

9.4.2 Principe de D'Alembert

Soient $\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_N$ les forces issues des contraintes f_i . On les nomme forces de liaison. Elle n'effectuent aucun travail lors d'un déplacement virtuel, ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^N \vec{T}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

On note \vec{F}_i les forces qui ne sont pas des forces de liaison. Pour exprimer les forces de liaison, on a

$$\vec{F}_i + \vec{T}_i = m\vec{a}_i \Leftrightarrow \vec{T}_i = m\vec{a}_i - \vec{F}_i$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^N (m\vec{a}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (9.5)$$

Exemple : appliquons le principe au pendule simple. On prend $\delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$ et la force de liaison $\vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$. Si $\vec{T} \cdot \delta\vec{r} = 0$ on a que $T_x\delta x + T_y\delta y = 0$ est vrai $\forall x$ et y satisfaisant $x\delta x + y\delta y = 0$.

Remarque : On choisi un repère centré au point d'attache fixe de la corde où x est dirigé vers le bas et y est dirigé vers la droite.

On a maintenant deux equations d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} T_x\delta x + T_y\delta y = 0 \\ x\delta x + y\delta y = 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

En prenant $\vec{T} = m\vec{a} - m\vec{g}$, on a

$$\begin{cases} (m\ddot{x} - mg)\delta x + m\ddot{y}\delta y = 0 \\ x\delta x + y\delta y = 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

9.5 Forces généralisées

9.5.1 Forces non conservatives

Les forces non conservatives \vec{F}_i^{nc} ne sont pas issues de potentiels. Le travail qu'elles effectuent dépend du chemin emprunté, comme la force de frottement qui est exprimée en fonction de la vitesse. En allant d'un point A vers un point B , dépendant de la vitesse de l'objet, le travail exercé n'est pas le même. Une force non conservative est telle que pour deux courbes (chemins) (Γ_1) et (Γ_2) différentes qui mènent d'un point A à un point B ,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}^{\text{nc}} d\vec{r} \neq \int_{\Gamma_2} \vec{F}^{\text{nc}} d\vec{r} \quad \forall \Gamma_1, \Gamma_2$$

Ces forces non conservatives ne peuvent pas directement être exprimées dans le Lagrangien. On doit utiliser des forces généralisées.

9.5.2 Forces généralisées

On note Q_i la $i^{\text{ème}}$ force généralisée en fonction de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Elle est exprimée ainsi :

$$Q_i = \sum_k \vec{F}_k^{\text{nc}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (9.8)$$

9.5.3 Cas général du Lagrangien

Afin d'exprimer le Lagrangien en prenant compte des forces généralisées, on a pour la $i^{\text{ème}}$ coordonnée,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (9.9)$$

Chapitre 10

Kepler et Forces centrales

10.1 Force centrale

Une force est dite centrale si à chaque instant, la droite donnant sa direction passe par un point O .

$$\vec{F}_P(t) = \gamma(t)\vec{OP} \quad (10.1)$$

Un point P subissant une telle force se trouve toujours dans le plan engendré par \vec{OP} et sa vitesse \vec{v}_P .

10.1.1 Loi des aires

Elle est aussi connue comme la deuxième loi de Kepler. On nomme r le rayon de la trajectoire du point P , autrement dit $\|\vec{OP}\| = r$ et θ l'angle parcouru. La loi des aires stipule que

$$r^2\dot{\theta} = C \quad (10.2)$$

où C est une constante.

10.2 Coniques

10.2.1 Foyer

Le foyer d'une conique est un point significatif auquel certaines distances entre des points de la trajectoire sont les mêmes. Dans notre contexte, c'est le point O par lequel passent la droite directionnelle de la force centrale en tout instant.

Exemples :

- Le foyer d'un cercle est son centre
- Une ellipse possède deux foyers F_1 et F_2 , ils sont tels que la somme de leur distance avec tout point P de l'ellipse est constante, c'est à dire que

$$\|PF_1\| + \|PF_2\| = cst$$

10.2.2 Types de coniques

On peut définir les coniques par leur excentricité e . Soit D la directrice, O le foyer, P un point quelconque sur la conique, et Q le point le plus proche de P sur la directrice. On a que

$$e = \frac{PO}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos(\theta)} \quad (10.3)$$

L'excentricité varie en fonction des trajectoires, elle vaut

- Cercle : $e = 0$,
- Ellipse : $e \in]0; 1[$,
- Parabole : $e = 1$,
- Hyperbole : $e \in]1; +\infty[$ (*elle a une valeur finie*),
- Droite : $e \rightarrow +\infty$.

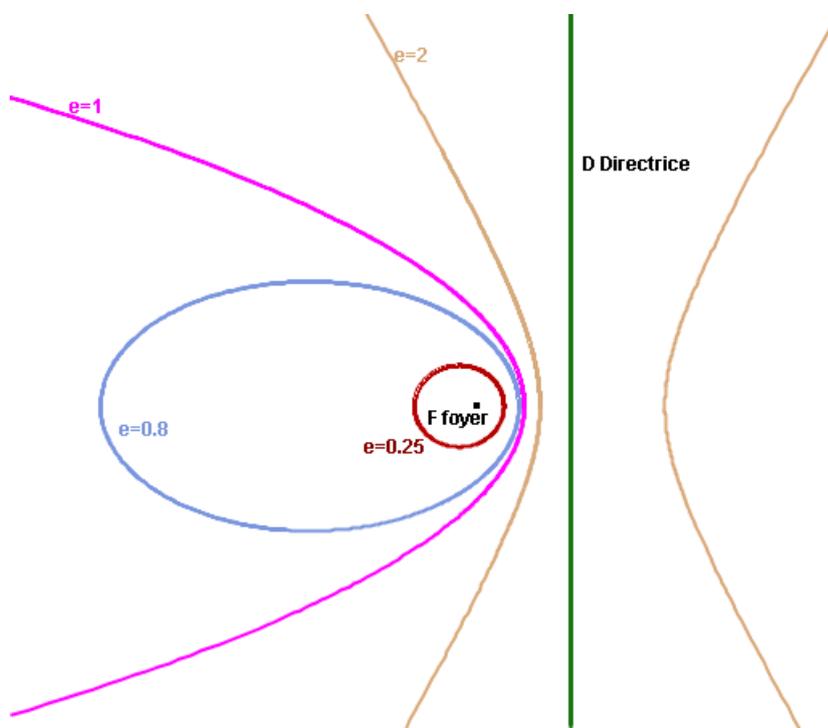


FIGURE 7 – Excentricité de différentes trajectoires

10.2.3 Accélération radiale et formule de Binet *Binet*

L'accélération radiale dite en $\frac{1}{r^2}$ peut être exprimée par la formule de Binet.

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (10.4)$$

où C est la constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$.

On a une équivalence entre l'accélération radiale $\frac{1}{r^2}$ et une trajectoire de conique :

$$\text{conique} \iff a_r = \frac{1}{r^2} \quad (10.5)$$

10.2.4 Force de gravité

Pour exprimer la force de gravité d'une masse M agissant sur une masse m , les deux séparés d'une distance r est

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \quad (10.6)$$

où G est la constante de gravitation universelle et vaut $G = 6,647 \cdot 10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]$ et $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$.

10.3 Ellipses

Soient a le demi-grand axe, b le demi-petit axe, A l'aphélie (le point le plus loin du Soleil) et P la périhélie (le point le plus proche du Soleil).

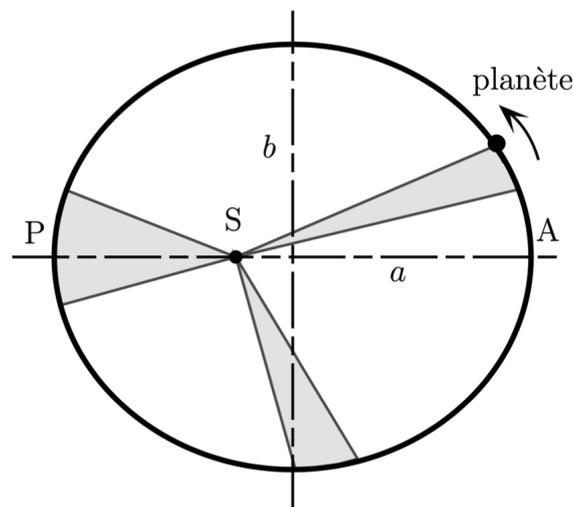


FIGURE 8 – Une ellipse

10.3.1 Période

La troisième loi de Kepler stipule que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \quad (10.7)$$

10.3.2 Conservation du moment cinétique

Par la loi des aires, on peut facilement trouver que le moment cinétique est conservé :

$$\vec{L} = \text{cste} \quad (10.8)$$

10.4 Rappel sur Coriolis et accélérations absolues

10.4.1 L'accélération de Coriolis

Soient $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire instantanée du référentiel en mouvement et \vec{v}_r la vitesse relative d'un objet par rapport au référentiel en mouvement, alors l'accélération de Coriolis est telle que

$$\vec{a}_{\text{cor}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \quad (10.9)$$

10.4.2 Accélération centripète

Il s'agit de l'accélération nécessaire pour qu'un objet ayant une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ maintienne une trajectoire circulaire de rayon \vec{r} . Elle est telle que

$$\vec{a}_{\text{cent}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (10.10)$$

10.4.3 Accélération absolue

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{cor}} + \vec{a}_{\text{cent}} + \vec{a}_r \quad (10.11)$$

où \vec{a}_r est l'accélération relative au référentiel en mouvement et vaut $\vec{a}_r = \dot{\vec{v}}_r$.

Chapitre 11

Forces de frottement

11.1 Frottement lors d'un déplacement

La force de frottement est résistante au mouvement du solide. Elle est donc dirigée dans le sens contraire de la vitesse et peut être généralisée par

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -f(\|\vec{v}\|)\hat{v} \quad (11.1)$$

Remarque : dans certains cas, f peut être constante.

11.2 Frottement visqueux

11.2.1 A basse vitesse

A basse vitesse, on a un écoulement laminaire. La force de frottement est donnée par

$$\vec{F}_{\text{fr}} = k\eta\vec{v} \quad (11.2)$$

où k est le coefficient de forme et η est le coefficient de viscosité du fluide.

Exemple : le coefficient de forme d'une sphère vaut $k = 6\pi R$.

Le coefficient de viscosité η peut varier en fonction de la température :

Dans l'eau à	$\eta \approx$	Dans l'air à	$\eta \approx$
$0^\circ C$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	0°	$1,7 \cdot 10^{-5}$
$20^\circ C$	$1 \cdot 10^{-3}$	20°	$1,81 \cdot 10^{-5}$
$40^\circ C$	$0,66 \cdot 10^{-3}$	40°	$1,91 \cdot 10^{-5}$

11.2.2 A haute vitesse

A haute vitesse, on a un écoulement turbulent. La force de frottement est donnée par

$$\vec{F}_{fr} = \frac{1}{2}C_x\rho_\mu\|\vec{v}\|^2S\hat{v} \quad (11.3)$$

où C_x est le coefficient de traînée adimensionnel, ρ_μ est la masse volumique du fluide et S est la surface perpendiculaire à \vec{v} .

Exemple : le coefficient de traînée vaut $C_x \approx 1,32$ pour un disque, $C_x \approx 0,45$ pour une sphère et $C_x \approx 0,03$ pour une aile d'avion.

11.3 Frottement entre deux solides

11.3.1 Frottement statique

Le frottement entre deux surfaces en contact, immobile l'une relativement à l'autre est donné par la relation

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -\vec{R}_1 \quad (11.4)$$

où \vec{R}_1 est la résultante des forces autre que le frottement appliqué au corps.

Lorsque la résultante des forces \vec{R}_1 dépasse une certaine limite, le corps se met en mouvement. Cette force maximale est donnée par

$$\|\vec{F}_{\text{fr}}\| \leq F_{\text{fr}}^{\text{max}} = \mu_s \|\vec{N}\| \quad (11.5)$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et \vec{N} est la force de réaction normale à la surface. μ_s ne dépend pas de l'aire des surfaces en contact.

11.3.2 Frottement cinétique

La vitesse relative des deux solides n'est pas nulle, il y a un déplacement relatif. La force de frottement cinétique est donnée par

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -\mu_c \|\vec{N}\| \hat{v} \quad (11.6)$$

où μ_c est le coefficient de frottement cinétique. Il est indépendant de la vitesse.

11.4 Résistance au pivotement

Tant qu'un moment extérieur est inférieur à une certaine valeur M_A^{max} , le solide reste immobile et la surface exerce un moment de force :

$$\vec{M}_A^{\text{max}} = -\vec{M}_A^{\text{ext}}, \quad M_A^{\text{max}} = \delta_s \|\vec{N}\|, \quad \|\vec{M}_{\text{fr}A}\| \leq M_A^{\text{ext}} \quad (11.7)$$

Chapitre 12

Statique

12.1 Solide en équilibre

12.1.1 Forces en équilibre

Appelons \vec{R} la résultante de toutes les forces extérieures qui est telle que

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

La condition pour que le solide soit à l'équilibre, ce qui implique que son accélération est nulle, est que

$$\vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (12.1)$$

où \vec{a} est l'accélération et elle vaut $\vec{a} = \vec{0}$.

L'équilibre peut être associé à un solide unique mais aussi à un ensemble de solides, chacun en équilibre. L'absence de mouvement permet les deux interprétations.

12.1.2 Moment de force en équilibre

Prenons un point A quelconque du solide. On appelle A le point de *réduction* et il n'est pas nécessairement un point d'application d'une force. La condition d'équilibre est la suivante

$$\text{équilibre} \Rightarrow \vec{M}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge \vec{F}_{\alpha} = \vec{0}, \forall A \quad (12.2)$$

12.2 Torseur

12.2.1 Définition d'un torseur

Un torseur de forces, noté \mathcal{T} , est un ensemble de vecteurs liés ou glissants auxquels on associe un point d'application (vecteurs liés), ou une droite de support du vecteur (vecteurs glissants).

$$\mathcal{T} = \{(P_1, \vec{u}_1), (P_2, \vec{u}_2), \dots, (P_N, \vec{u}_N)\} \quad (12.3)$$

Remarque : dans notre cas, les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ sont des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, mais le torseur à une définition plus rigoureuse dans un contexte mathématique. En mécanique, cette définition suffit.

12.2.2 Classe d'équivalence

L'équivalence de torseur est une relation

$$\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$$

On a trois propriétés caractéristiques d'une équivalence :

- La symétrie : $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_1$
- La réflexivité : $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_1$
- La transitivité : $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_3 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_3$

12.2.3 Equivalence de deux torseurs

On a que deux torseurs sont équivalents si et seulement si leur résultante et leur moments sont égaux, ce qui mathématiquement est exprimé ainsi :

$$\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2 \iff \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \text{ et } \vec{M}_A^{(1)} = \vec{M}_A^{(2)} \quad (12.4)$$

où \vec{R}_1 et \vec{R}_2 sont les résultantes des torseurs \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 respectivement et $\vec{M}_A^{(1)}$ et $\vec{M}_A^{(2)}$ sont les moments résultant en A des torseurs \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 respectivement.

12.2.4 Réduction

La valeur $\mathcal{T}(P)$ est appelée *le moment du torseur au point P* et on le note $\vec{M}_P = \mathcal{T}(P)$. Le torseur peut être décrit par trois paramètres appelés *éléments de réduction* : un point et deux vecteurs. La dépendance de la réduction au point de réduction obéit à la règle *BABAR* :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \quad (12.5)$$

où A est le point de réduction et \vec{R} est la résultante des forces.

12.2.5 Autres torseurs en mécanique

Type de torseur	Résultante	Moment A	<i>BABAR</i>
Torseur cinétique	\vec{p}	\vec{L}_A	$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}$
Torseur cinématique	$\vec{\omega}$	\vec{v}_A	$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{BA} \wedge \vec{\omega}$
Torseur de force	\vec{R}	\vec{M}_A	$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$

12.2.6 Equilibre d'un torseur

La condition d'équilibre en utilisant un tenseur est une valeur nulle aux éléments de réduction du tenseur :

$$\text{équilibre} \iff \mathcal{T} \sim \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0}, \forall A \end{cases} \quad (12.6)$$

12.3 L'équilibre par Lagrange

Les forces appliquées sont les forces non conservatives et les forces associées aux potentiels. Rapellons le principe de D'Alembert : Le travail infinitésimal des forces de liaison parfaites bilatérales est nul. Prenons $m\vec{r}_i = \vec{F}_i^{\text{nc}} + \vec{T}_i$. On aura que $\delta W = \sum (T_{i,x}\delta x + T_{i,y}\delta y + T_{i,z}\delta z) = 0$.

En partant des équations de Lagrange on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

Par le principe de D'Alembert on a que

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i$$

Le corps est à l'équilibre, ce qui implique que

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = 0$$

On en tire la condition suivante :

$$\text{équilibre} \iff \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (12.7)$$

Chapitre 13

Annexe

13.1 Format standart

1. Dessin d'ensemble.
2. Diagramme flottant.
3. Poser les forces sur le dessin.
4. Choix du repère :
 - Cartésien : $(\hat{x}; \hat{y}; \hat{z})$.
 - Cylindrique : $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$.
 - Sphérique : $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta})$.
5. Etablir les forces sur le repère.
6. Deux possibilités :
 - Etablir l'équation différentielle :

$$\begin{array}{ccc} \sum \vec{F} = m \vec{a} & , & \sum \vec{M} = I \vec{\omega} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ E.D.O & & E.D.O \end{array}$$

— Résoudre par Lagrange :

- (a) On trouve les coordonnées généralisées q_i ,
- (b) Si on utilise le principe de d'Alembert on cherche les contraintes parfaites $f(q_1, \dots, t)$, le déplacement virtuel et le travail virtuel,
- (c) On pose : $\mathcal{L} = T - V$
- (d) Si il y a des forces non conservatives on les transforme en forces généralisées Q_i ,
- (e) On établit le Lagrangien :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

7. Trouver ce que l'on cherche \rightarrow résolution des $E.D.O$.
8. Répondre aux questions.

13.2 Systèmes de coordonnées

13.2.1 Le repère cartésien

Propriétés

1. Centré en O
2. Base canonique : $(\hat{x}; \hat{y}; \hat{z})$
3. $\hat{x} \perp \hat{y} \perp \hat{z}$
4. $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = \|\hat{z}\| = 1$

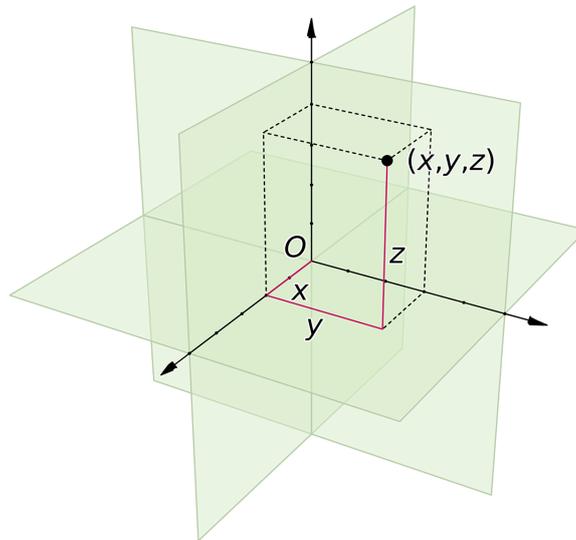


FIGURE 9 – Exemple de repère à coordonnées cartésiennes

Utilisation

- Mouvements de translations
- Balistique
- Mouvements oscillatoires rectilignes
- Chocs rectilignes

13.2.2 Le repère cylindrique

Propriétés

1. Centré en P
2. Base canonique : $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$
3. $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$
4. $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\varphi\| = \|\vec{e}_z\| = 1$

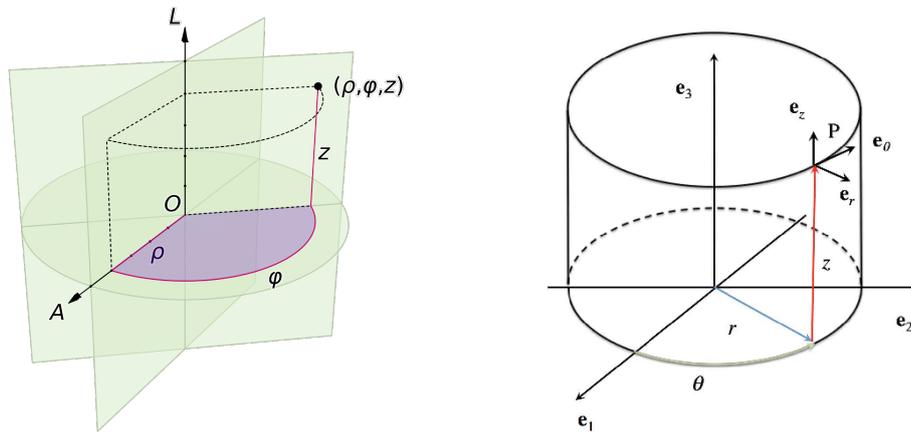


FIGURE 10 – Exemples de repères à coordonnées cylindriques

Utilisation

- Mouvements de rotations à angle unique φ
- Pendules
- Rotations du type $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = \dot{\vec{\varphi}}$
- Gyroscopes

13.2.3 Le repère sphérique

Propriétés

1. Centré en P
2. Base canonique : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$
3. $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_z$
4. $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\varphi\| = \|\vec{e}_z\| = 1$

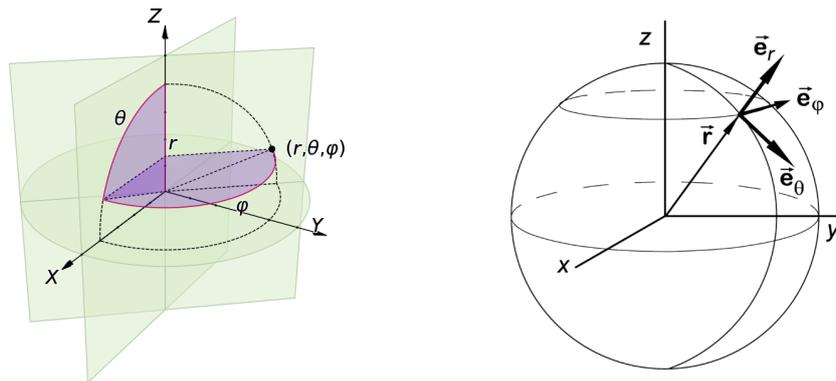
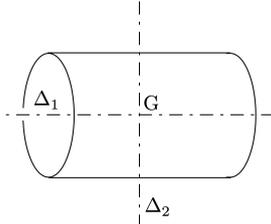
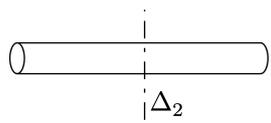
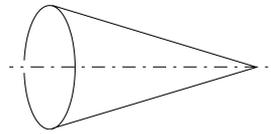
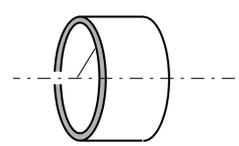
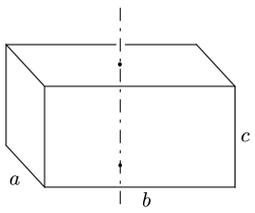


FIGURE 11 – Exemples de repères à coordonnées sphériques

Utilisation

- Mouvements de rotations à angles multiples φ et θ
- Rotations du type $\vec{\omega} = \dot{\varphi} + \dot{\theta}$
- Gyroscopes
- Angles d'Euler

13.3 Formulaire

Moments d'inertie de quelques corps homogènes			
Corps	Moment d'inertie	Remarque	
Cylindre plein	$I = \frac{1}{2}mR^2$	selon l'axe (Δ_1)	
Cylindre plein	$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$	selon l'axe (Δ_2)	
Sphère creuse	$I = \frac{2}{3}mR^2$		
Boule pleine	$I = \frac{2}{5}mR^2$		
Tige mince	$I = \frac{1}{12}mL^2$	$R \ll L$	
Cône	$I = \frac{3}{10}mR^2$		
Anneau creux	$I = mR^2$	paroi mince	
Parallélépipède	$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$		

13.4 Figures supplémentaires

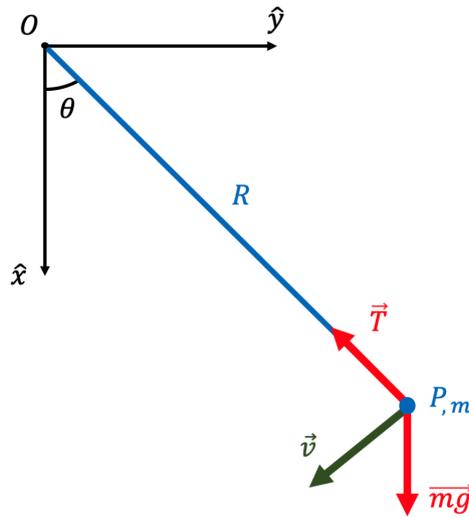


FIGURE 12 – Convention afin d'établir les forces

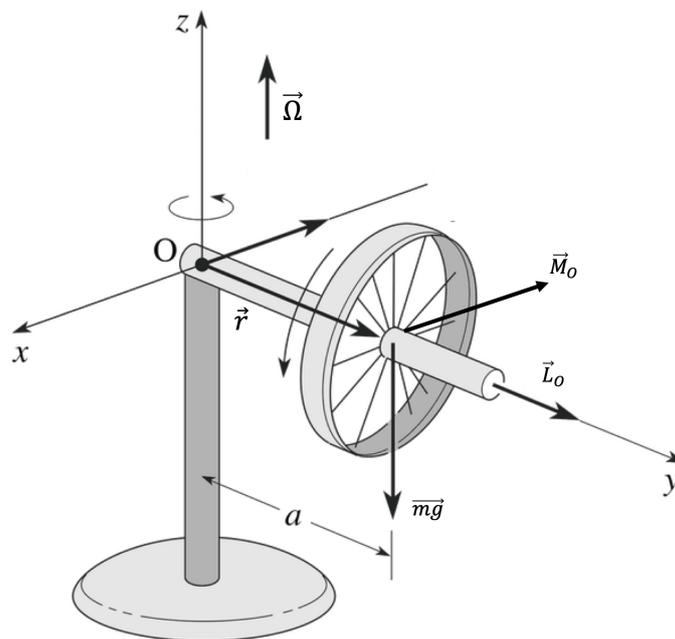


FIGURE 13 – Précession d'une roue à vitesse angulaire où un moment de force est appliqué

Sources :

- Cours du Dr. Müllhaupt : *PHYS-101(d) Physique générale I : mécanique*
- "Résumés de physique I (GM)" par Elio Skiadas Deltell
- Wikipedia
- Lectures by Walter Lewin : *8.01x - MIT Physics I : Classical Mechanics*