1 Introduction

On appelle Base Canonique, la base associée aux vecteurs de la Matrice identitée. On la note souvent: ξ , E ou encore $\mathcal{B}_{can}$

$$\mathcal{B}_{can} := \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \text{ t.q: } \vec{e}_1 = (1\ ,\ 0, ..., 0)\ ...\ \vec{e}_n = (0, ..., 0\ ,\ 1) \tag{1}$$

Une collection de vecteur peut former une base d'un sous espace vectoriel **si et seulement si:**

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \text{c'est une collection de } n \text{ vecteurs de dimension } n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Ils sont formateurs des éléments du sous éspace en question} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Ils sont linéairements indépendants} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Ils Spannent le sous espace vectoriel en question (Vect)} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Le Déterminant ne vaut pas zéro} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{Le rang vaut} n \\
&\Leftrightarrow \quad \text{La dimension du Ker} = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Tout vecteur d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ se note comme combinaison linéaire des vecteurs de la base dans lequel il est représenté.
Si la base n'est pas précisée, la base en question est la base canonique.

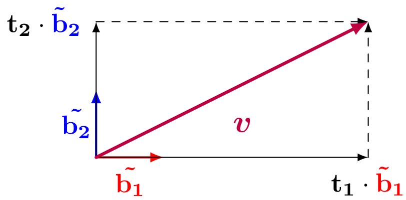
les facteurs de la combinaison du vecteur par sa base, sont appellés les les coordonnés du vecteur.
Ces coordonnés, sont des nombres réels et forment une unique famille de n couples (coordonné et vecteur de base), propres à la base de référence du vecteur.

En effet, un vecteur ne change jamais lorsqu'on le représente dans une base ou une autre.
Ce sont simplement ses coordonnés selon la base d'arrivée par rapport à la base de référence qui changent.

$$\begin{gathered}
\text{Soit le vecteur } \vec{v} : (v_1, ..., v_n);\ v = \{(t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 + ... + t_n \cdot \vec{b}_n) \,|\, t_i \neq t_j,\, t \in \mathbb{R}\} \\
\text{et les coordonnés de } \ v\ :\ [v]_{\mathcal{B}}\ =\ (t_1, ..., t_n) \text{ dans la base } : \mathcal{B} = (\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n)
\end{gathered} \tag{3}$$

1.0.1 Exemple:

Soit le vecteur $\vec{v}$ représenté dans le plan vectoriel selon la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, telle que $\mathcal{B} := \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$



$$\text{avec: } \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{cases} x = t_1 \cdot \vec{b_1} \\ y = t_2 \cdot \vec{b_2} \end{cases} \implies [v]_{\mathcal{B}} = (t_1, t_2) \tag{4}$$

1.0.2 Remarque:

un vecteur v ne se note **jamais** $\vec{v} : \big(t_1, ..., t_n\big)$ ou $\vec{v} : \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ sauf si celui-ci est en base canonique.

2 Matrices de passage

Afin de passer d'une base à une autre, on multiplie les coordonnés du vecteur dans la base canonique par les vecteurs de la base de destination.
la matrice employée pour passer de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ quelconque, est simplement composée des vecteurs de la base de déstination.
On nomme cette matrice la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ à la base $\mathcal{B}$, et se note:

$$P_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}}$$

2.1 Passage d'une base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

Comme dit précédemment, les coordonnés d'un vecteur sont représentés comme lui-même uniquement lorsque celui-ci est en base canonique $\mathcal{B}_{can}$. Lorsque celui ci est exprimé dans une autre base quelconque, disons **V**, alors il faut d'abord déterminer ses coordonnés selon la base canonique $\mathcal{B}_{can}$, pour pouvoir ensuite les passer dans la base de déstination.
On fait donc une division par les vecteurs de la base d'origine pour obtenir les coordonnés du vecteur.

2.1.1 Analogie

Vous avez comme référence le système métrique, en $\underbrace{\text{mètres}}_{base\,\mathcal{B}_{can}}$... vous recevez des $\underbrace{\text{mesures}}_{\vec{v}}$ en $\underbrace{\text{inches}}_{base\,\mathcal{B}}$ que l'on vous demande d'exprimer en $\underbrace{\text{Angström}}_{base\,\mathcal{B}'}$ Å, or vous savez qu'un Å est $\underbrace{10^{-10}}_{P_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}'}}$ m, et qu'un inch est $\underbrace{2,54 \cdot 10^{-2}}_{P_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}}}$ m... Donc vous allez dans un premier convertir la mesure en $\underbrace{\text{inches dans votre référence}}_{[v]_B}$ en effectuant une division par $2,54 \cdot 10^{-2}$, soit multiplier par $\underbrace{\frac{1}{2,54 \cdot 10^{-2}}}_{(P_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}})^{-1}}$ pour ensuite les exprimer en Ådepuis votre référence.

2.1.2 Formules

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux base différentes de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\begin{aligned} [v]_{\mathcal{B}} &= P \cdot [v]'_{\mathcal{B}} \\ [v]'_{\mathcal{B}} &= P^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}} \tag{5}$$

3 Changements de Bases pour les applications linéaires

Une application linéaire est une opération recevant des vecteurs d'un espace vectoriel de départ, et renvoie une image dans un autre sous espace vectoriel d'arrivée.
C'est comme une fonction, mais plus simple, et avec des termes compliqués...
On note :

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ \vec{x}:(x_1,...,x_n) &\mapsto T(\vec{x}) = A\cdot\vec{x} = \vec{y}:(y_1,...,y_p) \end{aligned} \tag{6}$$

3.1 Matrices représentatives

Soit T l'application linéaire telle que $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $\vec{x}:(x_1,...,x_n) \mapsto T(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$
On nous donne deux bases differentes (ou egales mais bon, ça m'étonnerait...) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Si on cherche à déterminer la matrice de T dans la nouvelle base, on peut employer plusieures methodes:

3.1.1 formules et analogies

Soit T l'application linéaire telle que $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
On a $\mathcal{B}$ la base du sous l'espace vectoriel de départ ($\mathbb{R}^n$), et $\mathcal{B}'$ la base du sous espace d'arrivée ($\mathbb{R}^p$).

$$T\left\{\begin{aligned} T:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ (x_1,...,x_n) &\mapsto T(x_1,...,x_n) = A\cdot\vec{x} \end{aligned}\right. \quad \text{et les bases :} \quad \begin{aligned} &\mathcal{B}' := \{\vec{\mathrm{b}_1'},...,\vec{\mathrm{b}_n'}\} \subseteq \mathbb{R}^p \\ &\mathcal{B} := \{\vec{b_1},...,\vec{b_n}\} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{7}$$

On a P, la matrice de changement de bases de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}$ et Q la matrice de changement de bases de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}'$.

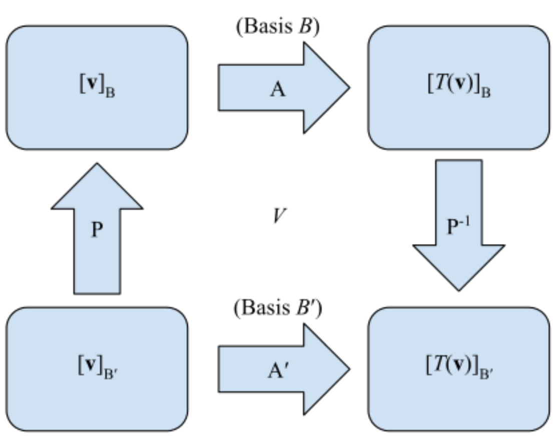
$$P:\begin{pmatrix} b_{1_1} & ... & b_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_1} & ... & b_{n_n} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \mathrm{b}'_{1_1} & ... & \mathrm{b}'_{1_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{b}'_{n_1} & ... & \mathrm{b}'_{n_n} \end{pmatrix}$$

On a la formule :

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Q^{-1}\cdot A\cdot P} \tag{8}$$

avec $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice représentative de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et A la matrice de T dans la base canonique.

$$\boxed{A = Q\cdot[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\cdot P^{-1}} \tag{9}$$



3.1.2 Méthode de l'image

Si on cherche à exprimer une application linéaire T définit par la matrice A en

3.2 Ker et Im ?

Plusieures methodes s'offrent à nous pour calculer le nouveau Ker et le nouvel ensemble Image d'une application linéaire après avoir subit un changement de base.

3.2.1 Calcul "Brute"

On peut en effet passer par les formules au dessu afin d'exprimer la nouvelle matrice de T, pour ensuite faire sa décomposition minimale afin d'en déduire son Ker et ensemble Image.

Rappel: On note la décomposition de A:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{\text{base Im(A)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}}_{\text{eq. du Ker(A)}} \quad \text{Avec: } \begin{cases} Im(A) & := Span(\alpha_1, ..., \alpha_n) \\ Ker(A) & := (a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0) \end{cases}$$

On la trouve de la sorte :

$$A \in M_{4\times4}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} & a_{1_3} & a_{1_4} \\ a_{2_1} & a_{2_2} & a_{2_3} & a_{2_4} \\ a_{3_1} & a_{3_2} & a_{3_3} & a_{3_4} \\ a_{4_1} & a_{4_2} & a_{4_3} & a_{4_4} \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} \Big\} \text{lignes 1 et 2 ont des pivots}$$

$\Longrightarrow$ donc, les colones 1 et 2 de A sont les colonnes pivots: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1_1} \\ a_{2_1} \\ a_{3_1} \\ a_{4_1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{1_2} \\ a_{2_2} \\ a_{3_2} \\ a_{4_2} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1_3} \\ a_{2_3} \\ a_{3_3} \\ a_{4_3} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1_4} \\ a_{2_4} \\ a_{3_4} \\ a_{4_4} \end{matrix} \end{pmatrix}$

On a donc :

$$\text{Decomp}_{\text{min}}(A) := \begin{pmatrix} a_{1_1} \\ a_{2_1} \\ a_{3_1} \\ a_{4_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1_2} \\ a_{2_2} \\ a_{3_2} \\ a_{4_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

4 Matrices equivalentes

4.1 Conditions d'équivalences

On dit que B ≡ A, soit B est eqivalente à A, si et seulement si :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{1.} & \text{A est équivalente à B} & \Leftrightarrow \text{A}Rg(\text{A}) = Rg(\text{B}) \Leftrightarrow Rg(f) = Rg(g) \\ \textbf{2.} & \text{A est colonne-équivalente à B} & \Leftrightarrow Im(g) = Im(f) \\ \textbf{3.} & \text{A est ligne-équivalente à B} & \Leftrightarrow Ker(f) = Ker(g) \end{array}} \tag{10}$$

4.2 Définitions et calcul d'équivalences

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires, telles que :

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \text{A} \cdot \vec{x} \ \ |\text{A} \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$$

$$\vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = \mathrm{B} \cdot \vec{x} \ \ |\mathrm{B} \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$$

A et B sont les matrices de f et f en base canonique.

4.2.1 Condition 1.

On dit que B est equivalente à A si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}'$ une base de R^p telles que :

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{P} = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} \quad \begin{cases} \mathrm{Q}^{-1} & : \text{ Matrice de changement de } \underline{\text{coordonnés}} \text{ de } \mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B} \\ \mathrm{P} & : \text{ Matrice de changement de } \underline{\text{coordonnés}} \text{ de } \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{can} \end{cases} \tag{11}$$

4.2.2 Condition 2.

On dit que B est colonne-equivalente à A si il existe une base $mathcalB$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{P}} \quad \begin{cases} \mathrm{P} : \text{ Mat de changement de } \underline{\text{coordonnés}} \text{ de } \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{can} \end{cases} \tag{12}$$

4.2.3 Condition 3.

On dit que B est ligne-equivalente à A, si il existe une base de $\mathbb{R}^p$ telle que :

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{Q}^{-1} \cdot \mathrm{A}} \quad \begin{cases} \mathrm{Q}^{-1} : \text{ Mat de changement de c}\underline{\text{coordonnés}} \text{ de } \mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}' \end{cases} \tag{13}$$

5 Représentation de f de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}$

On note : $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ la base $\mathcal{B}$ formée de la famille des vecteurs $\vec{b}_i$

Soit l'application linéaire : $f : \begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \end{cases}$

on note $[f]_{\mathcal{B}}$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$
avec :

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot A \cdot P}$$

$$\equiv$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \quad P^{-1} \quad \end{pmatrix}}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_{can}} \cdot \rlap{$\overbrace{\phantom{\underbrace{\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_{can}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \quad P \quad \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}}}^{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}}}$} \underbrace{\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_{can}}}_{[f]_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \quad P \quad \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}$$

Par linéarité :

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}} &= P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \\ &= P^{-1} \cdot A \\ &= [f]_{\mathcal{B}} \cdot P^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}} &= P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P \\ &= A \cdot P \\ &= P \cdot [f]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

on a également :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} | & & | \\ f\left(\vec{b_1}\right) & \cdots & f\left(\vec{b_n}\right) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

6 Représentation de f de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

On note : $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$ la <u>base</u> $\mathcal{B}$ formée de la famille des vecteurs $\vec{b}_i$, et la base $\mathcal{B}'$ formée de la famille des vecteurs $\vec{b}'_i$

Soit l'application linéaire : $f : \begin{cases} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \end{cases}$

on note $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la <u>matrice représentative</u> de f de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
avec :

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Q^{-1} \cdot A \cdot P}$$

$$\equiv$$

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} & Q^{-1} & \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_{can}} \cdot \mathrlap{\overbrace{\phantom{\underbrace{\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_{can}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} & P & \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}}}^{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}can}}} \underbrace{\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}_{can}}}_{[f]_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}'}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} & P & \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}}$$

on a également :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} | & & | \\ f\left(\vec{b_1}\right) & \cdots & f\left(\vec{b_n}\right) \\ | & & | \end{pmatrix} \quad , \quad [f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} | & & | \\ f\left(\vec{b'_1}\right) & \cdots & f\left(\vec{b'_n}\right) \\ | & & | \end{pmatrix}$$